



Pomocný text

DIRICHLETŮV  
PRINCIP

Pod tímto vznešeným názvem se skrývá jednoduchá skutečnost: pokud máme v místnosti  $n$  židlí a více než  $n$  lidí a víme, že všichni lidé sedí na židli, pak víme i to, že na některé židli sedí alespoň dva lidé. Poněkud obecněji: pokud máme  $n$  přihrádek a více než  $n \cdot k$  objektů, pak do některé přihrádky spadá alespoň  $k + 1$  objektů.

Teď uvedeme dva příklady, na kterých bude jasné, jak se tento princip dá použít. (Pokud jste o Dirichleově principu slyšeli, určitě je znáte.)

**Příklad 1.** Na večíрку je  $n$  hostů. Pokud  $A$  zná  $B$ , pak i  $B$  zná  $A$ . Navíc vždy  $A$  zná  $A$ . Dokažte, že dva hosté znají stejný počet hostů.

**Řešení.** Hosty rozdělíme do skupin podle toho, kolik lidí znají. Není možné, aby na večíрку byl někdo, kdo zná jen sám sebe, a současně někdo, kdo zná všechny. A to z toho důvodu, že ten, který zná všechny by musel znát i toho, který zná jen sám sebe. Ale to není možné, protože ten, který zná jen sám sebe by musel znát toho, co zná všechny. Proto je skupin nejvýše  $n - 1$ . Protože lidí je  $n$ , jsou v nějaké skupině dle Dirichletova principu alespoň dva a my máme vyhráno, protože jsme dokázali to, co se po nás chtělo.

**Příklad 2.** Je dáno 2009 čísel. Ukažte, že rozdíl nějakých dvou je dělitelný 2008.

**Řešení.** Čísla rozdělíme podle toho, jaký zbytek dávají po dělení 2008. Takto je rozdělíme do 2008 skupin, v jedné jsou dle Dirichletova principu dvě čísla, obě dávají zbytek  $z$ . Jedno je  $2008k + z$ , druhé  $2008l + z$ , jejich rozdíl je  $2008(k - l)$ . Našli jsme takto dvě čísla, jejichž rozdíl je dělitelný 2008.