Pomocný text

Posloupnosti

Když se mluví o posloupnostech na vysokoškolské úrovni, používají se pojmy jako kartézský součin, binární relace nebo zobrazení. Nám ale bude stačit pohled na posloupnost jako na spoustu (obvykle nekonečně mnoho) čísel, která jsou zapsaná v nějakém pořadí. Podle tohoto pořadí přiřadíme číslům indexy – i-tý prvek v posloupnosti budeme značit a_i (první prvek posloupnosti je tedy a_1, i když mnohá literatura začíná posloupnost prvkem a_0.)

Abychom si usnadnili dorozumívání, zavedeme si několik pojmů:

Rostoucí posloupnost je taková, že pro všechna přirozená i platí $a_i < a_{i+1}$.
(Například $\{i\}_{i=1}^{\infty} = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \dots$)

Nerostoucí posloupnost je taková, že pro všechna přirozená i platí $a_i \geq a_{i+1}$.
(Například $1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \dots$)

Klesající posloupnost je taková, že pro všechna přirozená i platí $a_i > a_{i+1}$.
(Například $\{\frac{1}{i}\}_{i=1}^{\infty} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots$)

Neklesající posloupnost je taková, že pro všechna přirozená i platí $a_i \leq a_{i+1}$.
(Například $1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \dots$)

Monotónní posloupnost je neklesající nebo nerostoucí.

Ryze monotónní posloupnost je klesající nebo rostoucí.

Konstantní posloupnost je neklesající a nerostoucí.

Podposloupnost posloupnosti $a_1, a_2, \dots$ je libovolná posloupnost $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots$, kde $i_1 < i_2 < \dots$ jsou přirozená čísla, která ale nemusí být po sobě jdoucí.

Aritmetická posloupnost

splňuje rovnost

$$a_i = ki + t,$$

kde k, t jsou reálná čísla, číslu k říkáme diference. Lze ji také definovat tak, že rozdíl dvou po sobě jdoucích prvků posloupnosti je vždy roven k, nebo tak, že každý prvek kromě prvního je aritmetickým průměrem předcházejícího a následujícího.

U posloupností nás často zajímá součet prvních n prvků. Na to, jak jej spočítat pro aritmetickou posloupnost přišel jistý pan Gauss, v té době jako dítě. Ukažme si jeho metodu nejprve pro posloupnost přirozených čísel. Napišme si prvních n čísel dvakrát pod sebe takto:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Zjistíme, že v každém sloupci je součet $n+1$. A protože je sloupců n, dostáváme součet $n \cdot (n+1)$. Každé číslo jsme však započítali dvakrát, proto je hledaný součet prvních n přirozených čísel $s_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Pokusme se nyní naše úvahy zobecnit. Uvažme libovolnou aritmetickou posloupnost a pokusme se odvodit vzorec pro prvních n členů. Napišme si tyto členy opět pod sebe:

$$\begin{array}{cccc} k+t & 2k+t & \dots & nk+t \\ nk+t & (n-1)k+t & \dots & k+t \end{array}$$

Opět vidíme, že součet v každém sloupci je $nk+k+2t$. Slupců je celkem n a opět jsme každý člen započítali dvakrát, proto je výsledny vzorec $s_n = \frac{n \cdot (nk+k+2t)}{2}$.

Aritmetická posloupnost je vždy monotónní – pro $k > 0$ rostoucí, pro $k < 0$ klesající, pro $k = 0$ konstantní.

Příkladem aritmetické posloupnosti je posloupnost $\{2i\}_{i=1}^{\infty} = 2, 4, 6, 8, 10 \dots$. Její diference je $k = 2$.

Geometrická posloupnost

se vyznačuje tím, že pro její i-tý prvek platí

$$a_i = kq^i,$$

kde k, q jsou reálná čísla, číslu q říkáme kvocient. Lze ji také definovat tak, že podíl dvou po sobě jdoucích prvků posloupnosti je vždy roven q, nebo tak, že každý prvek kromě prvního je geometickým průměrem předcházejícího a následujícího. Pro $q > 1$ je tato posloupnost rostoucí, pro $0 < q < 1$ klesající, pro $q = 1$ konstantní.

Místo abychom někomu vnucovali vzorec pro součet prvních n prvků geometrické posloupnosti, ukážeme si, jak se prvky takové posloupnosti sčítají. Na jednom řádku si vyjádříme součet S prvních n sčítanců, na druhém jeho q-násobek:

$$\begin{aligned} s_n &= kq^1 + kq^2 + kq^3 + \dots + kq^{n-1} + kq^n, \\ qs_n &= \phantom{kq^1 + {}} kq^2 + kq^3 + \dots + kq^{n-1} + kq^n + kq^{n+1}. \end{aligned}$$

Od druhé rovnice první odečteme. Všimněme si, že všechny sčítance kromě prvního z první rovnice a druhého z druhé rovnice nám vypadnou, zbude

$$(q-1)s_n = q^{n+1} - 1.$$

Odtud si s_n čtenář snadno vyčíslí. S tímto součtem se počítá třeba tehdy, když chcete vědět, kolik peněz budete mít na účtu za deset let při měsíčním vkladu tisíc korun. Pak q odpovídá úroku, k vkladu a n počtu vkladů. Pokud platí, že $-1 < q < 1$, lze stejným trikem sečíst všechny prvky nekonečné geometrické posloupnosti. To je případ housenky, která první den uleze půl metru, druhý den čtrt, další den osminu, ... a po nekonečně dlouhé době se dostane do vzdálenosti metr od místa, ze kterého vyšla.

Pokud je ale $q \geq 1$, tento součet uteče do nekonečna, pro $q \leq -1$ osciluje. Příkladem geometrické poslounosti je $\{\frac{1}{2^i}\}_{i=1}^{\infty}$. Kvocientem této posloupnosti je $q = \frac{1}{2}$.

Fibonacciho posloupnost

je definována tak, že $a_1 = a_2 = 1$ a $a_{i+2} = a_{i+1} + a_i$ pro všechna přirozená čísla i. Platí pro ni desítky zajímavých vztahů, popisuje chování některých jevů v přírodě a je úzce spjata s tzv. zlatým řezem.

Na závěr něco pro hloubavé a zvídavé studenty, kteří už mají posloupnosti trochu vžité.

Sčítání a diferencování

Sčítání prvních n prvků a diferencování (počítání rozdílu mezi n-tým a $n-1$-tým prvkem) jsou operace, které jsou vůči sobě opačné (těm zvídavým prozradíme, že mají blízko k integrování a derivování). Řekněme, že máme mnohočlen

$$P(x) = b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + ... + b_0$$

a posloupnost $a_i = P(i)$. Pak součet prvků prvních n členů této posloupnosti v závislosti na n je mnohočlen stupně $k+1$ (x se v něm vyskytuje v $k+1$-té mocnině), zatímco $a_n - a_{n-1}$ je mnohočlen stupně $k-1$.