BRněnský KOrespondenční Seminář



XXXIII. ročník
2026/2027

ZADÁNÍ 3. SÉRIE

OPERACE

TERMÍN ODEVZDÁNÍ: 4. LEDNA 2027 23:59

Pokud odesíláš své první řešení, nezapomeň se prosím před jeho odesláním zaregistrovat na našich webových stránkách.

Součástí 3. série je studijní text, který ti může pomoci při řešení úloh 3.1. – 3.4. Před řešením těchto úloh výrazně doporučujeme si text projít.

ÚLOHA 3.1 - SEDMNÁCTKA

Ať M je množina uspořádaných sedmnáctic čísel 0 až 9. Definujeme operaci $\sim$, která dvěma takovým sedmnácticím $A = (a_1, a_2, \ldots, a_{17})$ a $B = (b_1, b_2, \ldots, b_{17})$ přiřadí sedmnáctici $A \sim B = (|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \ldots, |a_{17} - b_{17}|)$.

Rozhodněte a dokažte:

- Je operace komutativní?
- Je operace asociativní?
- Má neutrální prvek?
- Má inverzní prvky?
- Je množina M s operací $\sim$ grupa?

ÚLOHA 3.2 - OBOUSTRANNÁ SKOROGRUPA

Nechť $(M, @)$ je množina s binární operací, která je asociativní a splňuje následující vlastnosti:

- Existuje prvek $l \in M$ takový, že pro všechny prvky $m \in M$ platí $l@m = m$.
- Existuje prvek $r \in M$ takový, že pro všechny prvky $m \in M$ platí $m@r = m$.
- Pro každý prvek $m \in M$ existuje prvek $m_l \in M$ splňující $m_l@m = l$.
- Pro každý prvek $m \in M$ existuje prvek $m_r \in M$ splňující $m@m_r = r$.

Dokažte, že $(M, @)$ je grupa.

ÚLOHA 3.3 - SPOŘÁDANÁ OPERACE

Mějme $M \subseteq \mathbb{R}$ množinu uspořádanou strandardním způsobem. Na množině $M \times M$ můžeme definovat takzvané lexikografické uspořádání: dvojice (a, b) je větší než dvojice (c, d) pokud $a > c$ nebo pokud $a = c$ a $b > d$. (Prvky porovnáváme, jako když slova seřazujeme abecedně.)

Na M definujeme operaci $\% : M^2 \to M$. Tato operace je navíc izotonní zobrazení. To znamená, že pokud $(a, b) \geq (c, d)$, tak i $a\%b \geq c\%d$. Pokud taková operace má (oboustranný) neutrální prvek, určete všechny možnosti, kolik prvků může mít M.

BRKOS Team

úloha 3.4 - 2+neutrál je 3+neutrál

Mějme ternární operaci $f : A^3 \to A$ na neprázdné množině A. Prvek $n \in A$ nazveme *nevýznamným* vzhledem k operaci f, pokud pro libovolné $a \in A$ platí

$$f(a,n,n) = f(n,a,n) = f(n,n,a) = a.$$

O f navíc řekneme, že je *asiasociativní*, pokud pro libovolné $a,b,c,d,e \in A$ platí

$$f(f(a,b,c),d,e) = f(a,f(b,c,d),e) = f(a,b,f(c,d,e)).$$

Najděte bijektivní korespondenci mezi dvojicemi asiasociativní ternární operace $f : A^3 \to A$ a nějakého jejího nevýznamného prvku n_f a binárními asociativními operacemi $\tilde{f} : A^2 \to A$ s neutrálním prvkem $n_{\tilde{f}}$:

$$(f, n_f) \leftrightarrow (\tilde{f}, n_{\tilde{f}})$$

(Tzn. dejte příklad dvojice zobrazení. Jedno přiřadí ternární asiasocitivní operaci a jejímu nevýznamnému prvku nějakou asociativní binární operaci s neutrálním prvkem na stejné množině. Druhé naopak asociativní binární operaci s neutrálním prvkem přiřadí asiasociativní ternární operaci a její nevýznamný prvek. Tato zobrazení navíc musejí být vzájemně inverzní.)

úloha 3.a - Lichoběžněkam

Mějme lichoběžník $ABCD$. V něm sestrojíme úsečku u jakožto spojnici S_a, S_c (tedy spojnici středů stran AB, CD). Na u zvolíme body X_1, X_2 tak, že $|S_aX_1| = |S_cX_2|$. Dokažte, že součty obsahů trojúhelníků ABX_1, CDX_1 a BCX_2, ADX_2 jsou stejné.

úloha 3.b - fnáfce

Mějme funkci $f(x) = \frac{2+x}{3+2x}$. Vyjádřete pomocí členů Fibonacciho posloupnosti, čemu se rovná $f^n(1)$? Dodejme, že $f^n(1)$ značí, že na číslo jedna aplikujeme n–krát po sobě funkci f, tedy vždy dosadíme výsledek opět do funkce.

Pozn. Fibonacciho posloupnost definujeme jako $(F_n)_{n=0}^{\infty}$, kde $F_0 = 0, F_1 = 1$ a pro každé $n \geq 0$ platí $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, tedy posloupnost $(0,1,1,2,3,5,8,\ldots)$.

úloha 3.c - Semimodul Cecílie

Nechť A je neprázdná podmnožina přirozených čísel. Předpokládejme, že existují nesoudělná čísla p, q taková, že $p + A \subseteq A, q + A \subseteq A$. Ukažte, že množina $A \setminus (q + A)$ má q prvků. $p+A$ značí množinu všech součtů $p+a$, kde $a \in A$. Výraz $p+A$ značí množinu všech součtů čísla p s nějakým prvkem množiny A.

úloha 3.d - Pekelná geometrie

Purkrabího Hrabivce svádí 2026 čertů k hříchu, každý k jinému. Jak moc Hrabivec dohromady zhřešil daným hříchem si příslušný čert zapisuje jako reálné číslo od nuly do jedné. Pokud součet zapsaných čísel překročí 1, odnesou Hrabivce čerti do pekla. Pokud alespoň jeden čert má zapsané číslo o $\frac{1}{2}$ větší (a ne rovno) součtu čísel ostatních čertů, tento čert Hrabivce odnese do pekla sám. Určete nejvyšší možný součet druhých mocnin zapsaných čísel, pokud Hrabivec do pekla odnesen není.

Svá řešení uploadujte na našich stránkách:
`https://brkos.math.muni.cz/`

BRKOS Team