

BRněnský KOrespondenční Seminář



XXXIII. ročník
2026/2027

ZADÁNÍ 1. SÉRIE

DŮKAZOVÝ GULÁŠ

TERMÍN ODESLÁNÍ: 26. 10. 2026

Pokud odesíláš své první řešení, nezapomeň se prosím před jeho odesláním zaregistrovat [na našich webových stránkách](#).

Součástí 1. série je studijní text, který ti může pomoci při řešení úloh 1.1. – 1.4. Před řešením těchto úloh výrazně doporučujeme si text projít.

ÚLOHA 1.1 - RACIONÁLNÍ OTÁZKA

Dokažte, že neexistuje konečně mnoho racionálních čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ takových, že libovolné racionální číslo q jde napsat ve tvaru

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n,$$

kde $a_1, \dots, a_n$ jsou přirozená čísla.

ÚLOHA 1.2 - DVOJTROJÚHELNÍK

Mějme trojúhelník ABC a sestrojme mu osy úhlů. Dále každým vrcholem A, B, C veďme kolmici na příslušnou osu. Dokažte, že každá z os úhlů prochází průsečíkem dvou sestrojených kolmic.

ÚLOHA 1.3 - CIFERNÝ PODSOUČIN

O číslu n řekneme, že jde o ciferný podsoučin čísla $x_1x_2\dots x_k$, pokud jde o součin několika jeho cifer, nejméně jedné a nejvýše všech. Např. pro číslo 743 jsou všechny jeho ciferné podsoučiny 84 (ciferný součin 743), 28 (c.s. 74), 21 (73), 12 (43), 7 (7), 4 (4), 3 (3). Dokažte, že libovolné číslo je větší nebo rovno součtu všech jeho ciferných podsoučinů a určete, kdy nastává rovnost.

ÚLOHA 1.4 - VYHÝBÁVÁ VLASTNOST

Dva hráči hrají hru. Na tabuli je 2027 vrcholů, hráč 1 v každém kroku vybere dva vrcholy a hráč 2 určí, jestli jsou spojeny hranou, a zaznačí to na tabuli. Takto hra pokračuje, dokud hráč 1 není schopen rozhodnout, zda graf na konci bude obsahovat vrchol, ze kterého vedou alespoň dvě hrany. Pokud se mu to povede, aniž by se zeptal na všechny hrany, vyhrává. Jinak vyhrává hráč 2. Který z hráčů má vítěznou strategii?

(To znamená, že hráč 2 si vzhled grafu vymýšlí za pochodu tak, aby hráče 1 co nejvíce zdržel. Nemá na začátku rozmyšlené, jak graf vypadá.)

ÚLOHA 1.A - PRAVIDELNÝ ŠESTISTĚN

Máme krychli $ABCDEFGH$, ve které bod X je její střed (průsečík tělesových úhlopříček). Okolím bodu K nazveme množinu bodů uvnitř krychle, které mají od bodu K menší vzdálenost než od ostatních definovaných bodů. Určete poměr objemů okolí bodu A ku okolí bodu X .

ÚLOHA 1.B - POHLAVNÍ NEPŘÍTEL

Mějme skupinu o $n \geq 4$ lidech. Každý člověk má právě tři úhlavní nepřátele, přičemž nepřátelství je vzájemný vztah (jestliže Devy je úhlavní nepřítel Tondy, tak Tonda je úhlavní nepřítel Devyho). Cílem je rozdělit tuto množinu na dvě skupiny. Člověk je nespokojený, pokud je ve skupině s více než jedním úhlavním nepřítelem. Dokažte, že lze tuto skupinu lidí rozdělit na dvě skupiny tak, že nikdo není nespokojený.

ÚLOHA 1.C - PRASÁTKA

Ve čtvercové síti $n \times n$ můžeme vybarvit libovolný počet čtverečků tak, aby nikdy nebyl vybarven celý čtverec 2×2 . Poté se v každém kroku stanou 4 věci v tomto pořadí:

1. V každém sloupci zmizí nejspodnější vybarvený čtvereček.
2. V každém řádku zmizí vybarvený čtvereček nejvíce vpravo.
3. V každém sloupci zmizí vybarvený čtvereček nejvíce nahoře.
4. V každém řádku zmizí vybarvený čtvereček nejvíce vlevo.

Určete, pro jaká $n \in \mathbb{N}$ platí, že libovolný vybarvený útvar zmizí po dvou krocích.

ÚLOHA 1.D - IDEMPOTENT NEBO IMPOTENT?

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Určete počet čísel x v intervalu $[0, n-1]$ splňujících $x^2 \equiv x \pmod{n}$.

Svá řešení uploadujte na našich stránkách:

<https://brkos.math.muni.cz/>