

BRněnský KOrespondenční Seminář



XXXII. ročník
2025/2026

ZADÁNÍ 5. SÉRIE

USPOŘÁDANÉ MNOŽINY

TERMÍN ODESLÁNÍ: 20. 4. 2026

Text psaný kurzívou není součástí úloh. Pokud odesíláš své první řešení, nezapomeň se prosím před jeho odesláním zaregistrovat [na našich webových stránkách](#).

Součástí 5. série je studijní text, který ti může pomoci při řešení úloh 5.1. – 5.4. Před řešením těchto úloh výrazně doporučujeme si text projít.

Finťa se probudila na studené zemi ve vězení Dvanáctistěnu. Události minulého dne se jí slévaly v jedno jako babiččin guláš a hlava jí třeštila jako po dědečkově medicíně. Co s ní bude? Jak se dostane ven? Jak se vrátí do svého světa? A co se to vůbec děje?

„Okamžitě se uklidni!“ rozkázala si Finťa. Musela si uspořádat myšlenky.

ÚLOHA 5.1 - NESPOŘÁDANÍ DĚLITELÉ

Máme uspořádanou množinu $(\mathbb{N}, |)$ přirozených čísel (0 nepovažujeme za přirozené číslo) uspořádanou pomocí dělitelnosti.

1. Najděte injektivní izotonní zobrazení množiny $(\mathbb{N}, |)$ na $(P(\mathbb{N}), \subseteq)$ množinu všech podmnožin přirozených čísel uspořádanou podle inkluze.
2. Dejte příklad nekonečné lineárně uspořádané množiny X takové, že neexistuje injektivní izotonní zobrazení $(\mathbb{N}, |) \rightarrow X$.

Rozhodně chtěla pryč. Chyběli jí kamarádi. Chyběly jí Brkosovice. Chyběl jí i ten Kouma s Ňoumou. Vykoukla z malého okýnka Dvanáctistěnu. Nemohla tu ale přece nechat obyvatele Numerské říše jen tak napospas osudu.

„Dobré ráno!“ ozvalo se s nadšením kousek od Finťy.

„Haló? Je tam někdo?“ rozhlížela se zoufale Finťa, ale viděla pouze holé stěny své cely.

„Jsem ve vedlejší cele,“ odpověděl vlídný chraplavý hlas. „Vy musíte být Finťa, že?“

„Jak to víte?“

„Sledoval jsem vaše vystoupení s Dáblem z okýnka na náměstí.“

„Dábel?“

„Ten černý oř. Byl to můj kůň.“

„Oh, ano! Ten mi moc pomohl! Co se s ním stalo?“

„Nebojte se, je v pořádku. Koně jsou tu jedni z mála stvoření, kterým by král Čtvrtý neublížil. A to přesto, že jste se s ním snesla na náměstí jako nějaký Superman.“

ÚLOHA 5.2 - SUPERMAN

Uspořádaná množina má právě jednu podmnožinu, jejíž supremum neexistuje. Ukažte, že tato podmnožina je prázdná.

„Povídal jste, že to byl váš kůň. To ale znamená, že jste...“

„Ano, jsem král Třetí.“

Fintě přeběhl mráz po zádech. „Předpokládala jsem, že jste mrtvý.“

„Musím vás zklamat, váš předpoklad byl mylný. I když už jsem tu ve vězení tak dlouho, že jsem si sám skoro myslel, že už jsem na onom světě. Chybí mi svoboda. Chybí mi moje žena.“

„Dostanu vás ven,“ rozhodla se Finťa a s námahou se vyškrábala na nohy. S úlevou zjistila, že jí nechali tašku, kterou dostala darem od Dvojky. Sáhla do ní a ke svému údivu vylovila sadu pakličů. Lomcovala, vrtěla, cinkala a šroubovala, než zámek dveří konečně cvakl a ony se s rachotem otevřely.

ÚLOHA 5.3 - SKVĚLE USPOŘÁDANÁ MNOŽINA

Množina $M \subseteq \mathbb{R}$ má tu vlastnost, že každá její neprázdná podmnožina má nejmenší i největší prvek. Ukažte, že M je konečná.

Ve druhé cele našla čiperného staříka. Měl pronikavý pohled a upravený bílý plnovous. Jeho vznešenost z něj přímo sálala a ona si nemohla pomoci a zlehka se mu poklonila.

„Neklaň se mi, Finťo. Vždyť teď bych se měl klanit spíš já tobě, když jsi mě vysvobodila. A vidím, že jsi našla i moji tašku!“

Finťa se s údivem podívala na brašnu, na které stál nápis 1/3. Jeho taška? Vždyť ji dostala od Dvojky a ta tvrdila, že...

„Dvojka je vaše žena! To ona mi ji dala. Zachránila mě a pomohla mi! Říkala, že tu budu mít nějaké poslání,“ docvaklo to konečně Fintě.

„Jsem rád, že jsi ji potkala a že je v pořádku. Po tom, co udělali mně, mi bylo jasné, že budou chtít dostat i ji. Naštěstí ona je vždycky o krok napřed.“

ÚLOHA 5.4 - NQNQRQ

Rozhodněte:

1. Za 0,5 bodu: zda existuje dvojice izotonních zobrazení $i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ a $j : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$ taková, že jejich složení (v tomto pořadí) je identita na $\mathbb{N}$,
2. Za 4,5 bodů: zda existuje dvojice izotonních zobrazení $i : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ a $j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ taková, že jejich složení (v tomto pořadí) je identita na $\mathbb{Q}$.

„Dostaneme tě, Finťo, domů. Neboj,“ ujišťoval ji král Třetí a Finťu zalila vlna vděčnosti.

„Ne,“ řekla Finťa a sama se udivila rozhodnosti ve svém hlase, „nejdřív zachráníme Numerskou říši.“

Král se zazubil a vytáhl ze své tašky pár krátkých mečů. „Pak myslím, že tyhle dvojčata budeš potřebovat.“

Finťa si meče potěžkala – padly jí do ruky, jako by byly ukované přímo pro ni. Král ji pak vedl spleťmi chodbičkami, podzemím, nadzemím i skrytými komnatami. Bylo jasné, že právě on stál za zrodem Čtyřince, bývalého Třince.

Dorazili k velkým dveřím, které střežili dva sněhuláci.

ÚLOHA 5.A - SNĚHULÁK

Mějme dvě kružnice $k_1(S_1, r)$ a $k_2(S_2, \frac{2r}{3})$ s vnějším dotykem. Existují 3 tečny, které mají tyto kružnice společné, přičemž t_1 prochází bodem dotyku kružnic k_1 a k_2 . Dokažte, že body S_1 , $(t_1 \cap t_2)$, S_2 a $(t_1 \cap t_3)$ leží na jedné kružnici.

Fintě konečně došlo, že Sněhurák, kterého viděla včera, byl ve skutečnosti Sněhulák. Jen v tom šoku, který zažila, se jí to všechno v hlavě pomotalo. Společně s králem Třetím vpadli do

sálu. Na trůně seděl král Čtvrtý a do ucha mu něco šeptal vševěd Devět. Hrůza se jim doslova vepsala do tváře, když uviděli krále Třetího v šedém vězeňském úboru a Finťu v růžovém topíku a kostkovaných kalhotách.

„Co tu děláte?“ vyskočil Čtvrtý.

„Přišli jsme tě svrhnout,“ odsekla bez váhání Finťa. S králem Třetím si vyměnili jediný pohled a okamžitě se rozdělili. Král Třetí výhrůžně namířil svoje kopí (které rovněž vytáhl ze své bezedné tašky) přímo do obličeje králi Čtvrtému, zatímco ona se vydala za pomstou k podivínskému věštci Devětovi. Boj to byl znamenitý, jako vystřižený z akčního filmu.

Do soundtracku k jejich epické scéně začala v představách hrát píseň „Paint It, Black“.

ÚLOHA 5.B - ROLLING STONES

V kružnici o poloměru R se současně kotálí dva čtverce. První čtverec má stranu délky $2R\sin 10^\circ$, druhý čtverec má stranu délky $2R\sin 30^\circ$. Oba mají obarvený jeden vrchol. Tímto vrcholem začínají v jednom bodě – to je první setkání. Pokaždé, když se tento obarvený vrchol dotkne kružnice, zaznačí si tuto polohu a napíše k ní pořadové číslo dotyku. Jaké bude pořadové číslo odpovídajících si bodů, kde se čtverce potkají potřetí?

Čtvrtý ani nestihl popadnout dech, natož zavolat strážce. Třetí se odrazil od mramorové podlahy a jeho kopí opsalo smrtící stříbrný oblouk. Čtvrtý na poslední chvíli uskočil a tasil svůj těžký, rubíny zdobený meč. Ocel narazila na ocel a trůnním sálem se rozlehlo ohlušující třesnutí. Vyletěly jiskry.

Zatímco se králové do sebe zaklesli v brutálním tanci, Finťa vystřelila vpřed jako šíp. Vštec Devět se zlomyslně ušklíbl, zvedl své kostnaté ruce a z dlouhých rukávů mu vyletěl oblak oslepujícího fialového dýmu, který leptal i samotný vzduch. Finťa ale nezaváhala. Filmovým skluzem podjela pod jedovatým mrakem, v plné rychlosti popadla ze stolu těžký stříbrný pohár a mrštila jím po Devětovi. Ten sice uhnul, ale to už byla Finťa ve vzduchu. Odrazila se od kamenného sloupu a s dravčím výkřikem na něj dopadla.

Zpátky u králů začínalo jít do tuhého. Čtvrtý byl sice silnější a jeho rány drtily kamenné dlaždice, ale Třetí měl výhodu dosahu a mrštnosti. Sérií bleskových výpadů nutil uzurpátora ustupovat k masivním vitrážovým oknům. Pak přišel nečekaný manévr. Třetí zabodl tupý konec kopí do země, zapřel se o něj jako o skokanskou tyč a oběma nohama kopl Čtvrtého přímo do hrudi. Král odletěl vzad, roztříštil masivní dubový stůl na třísky a s těžkým heknutím se svalil na zem. Než se stihl vůbec pohnout, hrot kopí se mu zastavil milimetr od krční tepny.

„Tvoje zkušební doba na trůnu právě vypršela,“ procedil Třetí s ledovým klidem.

V ten samý moment se ozvala dutá rána z druhé strany sálu. Devět se v zoufalství pokusil vyvolat další ze svých podivných magických triků, ale Finťa magii vyřešila pragmaticky – jednoduše a bez okolků mu vrazila ukázkový pravý hák přímo na čelist. Ozvalo se křupnutí a vštec se s protočenýma očima zhroutil na podlahu jako loutka s přestřiženými nitkami. Finťa mu pro jistotu klekla na hrudník a k jeho krku přitiskla čepele svých dvou mečů.

V rozmláceném sále zavládlo ticho, přerušované jen cinkáním rozbitého skla a těžkým oddechováním obou vítězů. Král Třetí a Finťa si přes celou místnost vyměnili uznalé kývnutí. Trůn byl dobyt.

Král Třetí Fintě poděkoval. „O svoje království už se postarám. Utíkej domů.“

„Jak se ale dostanu domů?“ zeptala se unavená Finťa.

„Jak jinak než po schodech?“

Před Finťou se zničehonic objevily nekonečné schody a do toho uslyšela známý hlas. „Finťo! Konečně jsem tě našel!“ volal Ňouma.

ÚLOHA 5.C - SCHODY DO NEBE

Finta s Ňoumou stojí na nekonečném schodišti. Chtějí se potkat (na stejném schodě), ale musejí se pohybovat podle určitých pravidel. Jeden z nich se pohne o 1 schod libovolným směrem. V dalším kroku se musí libovolný z nich pohnout o dvojnásobek schodů opět libovolným směrem. Kde musejí Finta s Ňoumou stát, aby se v konečném počtu kroků sešli na stejném schodě?

(Nemusejí se střídat a směr pohybu nahoru nebo dolů si můžou vybrat, nicméně pokud jeden z nich přejde po schodě, kde druhý stojí, nesmí se tam zastavit, musí splnit předepsaný počet kroků.)

Nějakou chvíli kolem sebe po nekonečných schodech jen oba kroužili, až se na jednom stupni setkali a schody se rozplynuly. Finťa s Ňoumou se zčistajasna objevili na chodbě v Brkosovicích.

Fintě se zaleskly oči. Byla doma. Ňouma zářil radostí a kousek opodál stál Kouma, který podle všeho zvládl vytvořit ty nekonečné schody propojující Numerskou říši a Brkosovice.

Byl to dlouhý den. Týden? Měsíc? Finťa vůbec netušila. Poděkovala oběma klukům a zamířila rovnou do zasloužené sprchy.

Kouma se pousmál na Ňoumu, který se ještě pořád červenal z toho, jak ho Finťa radostí objala.

„Tak co? Už jí konečně dáš ten prsten?“

ÚLOHA 5.D - PRSTEN MNOHOČLENŮ

Pro polynom f s celočíselnými koeficienty dokažte následující: Existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že 12 dělí f^n právě tehdy, když 6 dělí každý z koeficientů.

Svá řešení uploadujte na našich stránkách:

<https://brkos.math.muni.cz/>