

BRněnský KOrespondenční Seminář



XXXII. ročník
2025/2026

ZADÁNÍ 4. SÉRIE

TEORIE ČÍSEL

TERMÍN ODESLÁNÍ: 9. 3. 2026

Text psaný kurzívou není součástí úloh. Pokud odesíláš své první řešení, nezapomeň se prosím před jeho odesláním zaregistrovat [na našich webových stránkách](#).

Součástí 4. série je studijní text, který ti může pomoci při řešení úloh 4.1. – 4.4. Před řešením těchto úloh výrazně doporučujeme si text projít.

Náměstím se rozhostilo hrobové ticho. Finťa, sedící na vzpínajícím se černém oři, vypadala v zapadajícím slunci jako zjevení. Lidé v pestrobarevných hábitech na ni hleděli s otevřenými ústy. „Slyšíte mě?“ křikla znovu. „Král Čtvrtý se vás nebojí, on vámi opovrhne!“ Dav začal nespokojeně hučet, ale než se stačil zformovat v nějaký odpor, z postranní uličky se vyhnul podivný průvod.

V čele krácel muž s obrovskou čepicí připomínající sněhovou kouli – místní mu neřekli jinak než Sněhurák. Za ním se v dokonalém šiku batolil zástup trpaslíků. Nebylo jich sedm, bylo jich... no, bylo jich přesně tolik, aby z toho šla hlava kolem. Každý v rukou svíral transparent se složitým mocninným vzorcem. Finťa si uvědomila, že tohle je další z pastí, kterou na lidi nastražil Devět.

ÚLOHA 4.1 - SNĚHURÁK A $2^{kn} - 1$ TRPASLÍČ

Najděte všechna přirozená čísla k taková, že ať si vezmeme za n libovolné přirozené číslo, bude $2^{kn} - 1$ dělitelné sedmi.

„Ignorujte tu bláznivou holku!“ ječel Sněhurák a rozhazoval kolem sebe letáky. Mezi lidmi se začala šířit panika a podivná otupělost. Finťa si všimla, že někteří lidé v davu začali počítat na prstech a mumlat si něco o Eulerových funkcích. Jako by je Devět očaroval, aby se snažili najít smysl v číslech tam, kde žádný nebyl.

ÚLOHA 4.2 - IDK REÁLNĚ

Určete všechna přirozená čísla m pro která existuje přirozené n takové, že $\varphi(n) = \frac{n}{m}$.

Finťa se pokusila popohnat koně kupředu, ale cestu jí zastoupil královský zahradník Lojza. Vypadal úplně nepřičetně, v rukou držel křidu a přímo na dlažební kostky náměstí horečnatě čmáral tři čísla. „Musím je sčítat a odčítat,“ mumlal si pro sebe k Fintě, „pokud nevytvořím to správné číslo, tak je to totální L, chápeš? Vesmír ztratí balanc!“

ÚLOHA 4.3 - + NEBO -

Na tabuli jsou napsána 3 celá čísla. Lojza se nudí, a tak si v každém kroku vybere dvě čísla z tabule která buď sečte, nebo odečte a výsledek napíše místo libovolného čísla na tabuli. Za jakých podmínek bude schopný takto po konečně mnoha krocích vytvořit libovolné celé číslo které si vymyslí?

Lojza ale nebyl jediný. Celé náměstí se měnilo v jednu velkou učebnu aritmetiky. Finťa

viděla, jak si lidé na cáry papíru píšou obrovská čísla a snaží se z nich vypočítat nějaké podivné střídávě součty cifer. „Je to rok 2026!“ křičel někdo z davu. „Musíme to spočítat, než nás Devět promění v prach!“

ÚLOHA 4.4 - + A -

Pro přirozené číslo definujeme jeho *pm součet* podobně jako ciferný součet, akorát první cifru přičteme, druhou odečteme, třetí přičteme atd. *Pm součet* záporného čísla je $-pm$ součet jeho absolutní hodnoty. Určete *pm součet pm součtu pm součtu* čísla $2026^{2025 \times 2027}$.

V tu chvíli se z davu vyřítila Radina. Vypadala zmateně, jako by se právě probudila z hrozného snu. „Finňo! Musíš mi pomoci!“ křičela. „Devět použil ten svůj příšerný přístroj! Cítím se... jako by moje mysl nebyla moje. Jako by se někdo jiný díval mýma očima!“ Finňa pochopila, že Devět začal experimentovat s prohazováním myslí samotných studentů Brkosovic.

ÚLOHA 4.A - CHCI TVOJE TĚLO

Přístroj věstce Devěta fungoval tak, že se do něj připojí dva lidé a těm se prohodí jejich mysl (tzn. např. Lojzova mysl pak žije v Radinině těle a naopak). Nicméně pak se do výměny zapojili další studenti Brkosovic, kterých je celkem n . Po čase je to ale omrzelo a chtěli se pomocí stejného přístroje vrátit zpátky. Kolik nejméně sezení u věstce Devěta si musí zabukovat, aby se určitě vrátili zpátky, ať už bylo předchozí prohození libovolné?

Zatímco se Finňa snažila uklidnit Radinu, vzduchem se ozval mechanický bzukot. Nad hlavami davu se vznášel podivný měděný stroj, který ze své terasy ovládal sám věstec Devět. „Fascinující, že?“ křičel na celé náměstí a jeho hlas zněl jako skřípání kovu. „Podívejte se na ty geometrické obrazce! Ty kružnice se musí dotýkat, Finňo! Jen jedna tečna je správně!“

ÚLOHA 4.B - TEČNÉ KRUŽNICE

Dokažte, že pro libovolný trojúhelník s vrcholy A, B, C existují tři kružnice se středy v bodech A, B, C takové, že se po dvou dotýkají (každá dvojice kružnic má právě jeden společný bod). Dokažte, že jsou tyto kružnice určeny jednoznačně.

„Dost těch kouzel!“ zařvala Finňa a hodila po stroji zbylý střep z vázy. Přístroj zakolísal, ale v tu chvíli se otevřela brána paláce a vyšel král Čtvrtý. V rukou svíral barevnou kostku, na které se podivně leskly barvy. „Podívej se na tuhle kostku, Finto,“ pronesl král. „Devět se rozhodl ji přebarvit. Pokud ji nesložíš správně, už nikdy neuvidíš své Brkosovice!“

ÚLOHA 4.C - RUBIKŮV BULLSHIT

Devět se rozhodl si přebarvit rubikovu kostku $3 \times 3 \times 3$. Obarvuje jednotlivé čtverečky pomocí šesti barev. Vždy, když dva sousední (hranou) čtverečky budou mít stejnou barvu, dostane Devy bod. Kolik nejvíce může získat bodů, jestliže každou barvu musí použít alespoň jednou?

Král zrudl vzteky, když Finňa jeho hádanku rozsekala na kusy. „Dost!“ vykřikl a pokynul strážím. „Odveďte ji k Dvanáctistěnu!“ Dav zděšeně vydechl. Dvanáctistěn byla obří stavba na okraji náměstí, o které se říkalo, že je branou do jiného světa. Byla to čistá platónská dualita zhmotněná v kameni. Finňa stála před ní a sledovala, jak se její stěny začínají chvět. Tohle nebyl konec, tohle byl teprve ten správný grind.

ÚLOHA 4.D - PLATONICKÁ DUALITA

Mějme pravidelný dvanáctistěn s hranou délky 1. Do něj vepíšeme dvacetistěn tak, že spojíme středy sousedních stěn. Do takhle vzniklého dvacetistěnu vepíšeme dvanáctistěn tak, že opět spojíme středy sousedních stěn. Tímto způsobem postupně vytvoříme nekonečně mnoho střídajících se dvanáctistěnu a dvacetistěnu. Sečtěte objemy všech vzniklých těles.

Svá řešení uploadujte na našich stránkách:

<https://brkos.math.muni.cz/>