

BRněnský KOrespondenční Seminář



XXXII. ročník
2025/2026

ZADÁNÍ 3. SÉRIE

POSLOUPNOSTI

TERMÍN ODESLÁNÍ: 05. 01. 2026

Text psaný kurzívou není součástí úloh. Pokud odesíláš své první řešení, nezapomeň se prosím před jeho odesláním zaregistrovat [na našich webových stránkách](#).

Součástí 3. série je studijní text, který ti může pomoci při řešení úloh 3.1. – 3.4. Před řešením těchto úloh výrazně doporučujeme si text projít.

Finťa byla u krále „na návštěvě“. Strážé ji doprovodili do přepychového pokoje, což Finťa poznala podle toho, že na podlaze ležel tygrováný koberec, zdi lemovaly nevkusně groteskní obrazy a nábytek byl ozdobený různobarevnými saténovými potahy. Lidé se k ní chovali na oko slušně, nicméně bylo zřejmé, že je v tomto domě vězněm.

Za dveřmi slyšela dohadovat se hlasy, bohužel ale nebyla schopná od sebe rozeznat jednotlivá slova. Potom, co hlasy utichly, se otevřely dveře a do nich vrazil král Čtvrtý. Pokynul Fintě, aby se posadila na židli a sám se posadil na opačný konec skoro nekonečně dlouhého stolu. Pokynul všem sloužícím, aby opustili místnost. Neviditelné ruce stiskly Fintě žaludek, co se bude dít?

ÚLOHA 3.1 - DALŠÍ ŠÁHLÝ TRIBONACCI

Mějme rekurentně definovanou posloupnost

$$T_0 = 0, T_1 = 1, T_2 = -1$$

$$T_n = T_{n-2} - T_{n-3}.$$

Dokažte, že se v posloupnosti vyskytuje pouze konečně mnoho nul.

Král Čtvrtý musel trochu křičet, aby ho vůbec Finťa slyšela přes tu bizarní vzdálenost. „Odkud jsi?“

Trochu mnohoznačná otázka. „Nejsem úplně odtud, jsem z Brkosovic. Chodím tam do školy.“

„Brkosovice, hm,“ zamyslel se král. V pobledlém světle vypadal ještě hůř než když byl ozářen reflektory na oslavách. Oči měl vypouklé a lemovaly je obrovské černé kruhy. Její hřeben měl víc vlasů než král a jeho barva se blížila omyvatelné Sekundalex barvě z kutilského obchodu BowHouse. „Brkosovicím nevládnou.“

„Nikdo nevládne Brkosovicím, pane, ani ředitel Říďa. Žijí si svým vlastní životem. Ale chtěla jsem spíš říct, že jsem z úplně jiného světa.“

„To jsou vipná ta vaše jména. Finťa, Říďa. Hehe, docela skibidi, co?“ ušklíbl se král.

ÚLOHA 3.2 - SKIBIDI MNOŽINA

Množinu M přirozených čísel nazveme skibidi, jestliže každý její prvek kromě dvou lze jednoznačně vyjádřit jako součet jiných dvou prvků. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho nekonečně velkých skibidi množin.

Fintě bylo na zvracení. Nadměrné používání gen- α slangu v ní vyvolávalo the ICK, bez čepice, fr, fr.

„A co máš v plánu dělat v našem světě?“ zeptal se král.

„No chtěla jsem zajít na nějaké nákupy, podívat se po památkách, dát si nějaký dobrý jídlo,“ rozhazovala Finťa rukama, množství bylo nespočetné. „Taková basic turistka.“

„Teroristka?“ zhrozil se král.

„Turistka.“

„No ať to znamená cokoliv, myslím, že je na čase, aby ses takříkajíc vrátila, odkud jsi přišla.“

„Nemohla bych souhlasit víc.“

ÚLOHA 3.3 - ZLOMKOVÁ REKURZE

Mějme rekurzivně definovanou posloupnost: $a_{n+1} = \left(\frac{n!}{a_n}\right)^{(-1)^n}$ a víme, že $a_{2025} = \frac{2025!}{a_1}$. Jakých všech hodnot může nabývat a_1 ? Výsledek nemusíte vyčíslit.

„Výborně, pak tedy není nad čím diskutovat. Ty se vrátíš zpátky do svého světa a já tě nebudu muset odstranit jako toho předchozího.“

Toho předchozího? Fintě začala blikat kontrolka v hlavě. Něco bylo špatně.

„Vy se kvůli mně bojíte o svoji korunu?“

„Haha,“ utrousil král, ale jeho obočí se nad propadlými očima skoro spojovala. „Já nemám proč se bát, lidé mě milují.“

„Proto máte všude kolem hradu tolik stráží?“ Občas Finťa neumí zavřít pusku. Teď přišel ten moment jejího života, kdy toho litovala. Odstranit přechodícího? Byl to jeho předchůdce, král Třetí?

Jakýkoliv náznak úsměvu zmizel z králova obličej. „Co si mě tu opovažuješ urážet, ty ubohá, neznámá, průměrná holko!“

ÚLOHA 3.4 - PRŮMĚRNÁ POSLOUPNOST

Máme nekonstantní posloupnost A 2025 čísel. V prvním kroku vytvoříme novou posloupnost B tak, že jako i -tý člen vezmeme minimum i -tého člene předchozí posloupnosti a aritmetického průměru jeho dvou sousedních členů, tedy $b_i = \min\left\{a_i, \frac{(a_{i-1} + a_{i+1}))}{2}\right\}$. (Bereme to tak, že první a poslední člen spolu sousedí.) V druhém kroku vytvoříme stejným způsobem posloupnost C z posloupnosti B , pak D z C a tak dále. Řekneme, že posloupnost se ustálí, pokud už se v dalších krocích nemění. Po kolika krocích se může posloupnost ustálit?

„Snažím se ti tu pomáhat, ty nevděčnice! Zavolám ti nejpovolanějšího člověka. Devěte!“

Oh proboha jen to ne! pomyslela si Finťa. To už ale před ní stál, tentokrát alespoň zahalený, věštec.

„Je tvoje Devěte, neboj se jí to trochu okořenit,“ zašklebil se král a rázným krokem ji zanechal osamělou s podivínským věštcem.

ÚLOHA 3.A - OKOŘENĚNÝ POLYNOM

$P(x)$ je polynom s celočíselnými koeficienty a konečným počtem členů. Platí pro něj $xP(x+1) = (x+1)P(x+3)$. Najděte všechny vyhovující polynomy.

Finťa ale už věděla, co se stane. Nebyla holkou první den. Bohužel se jí tohle stalo už několikrát. Snažila se vypadat dobře, starala se o sebe, nosila barevné outfity, ale nikdy to nedělala

pro nikoho jiného, vždycky pro sebe. Ale oni to nechápali, mysleli si, že její sukně, její tričko, byla nějaká zpráva pro ně. Nikdy.

Měla toho dost. Byla blondýnkou studující matematiku. Nikdo ji nebral vážně, její úsměvy brali jako vyjádření její hlouposti a mysleli si, že růžové outfity znevažují její inteligenci.

Byl čas ukázat světu, že jejich předsudky jsou špatné.

ÚLOHA 3.B - JE ČAS

Máme hodiny. Zaznačíme si body A_{12} , A_2 , A_5 , A_8 , A_9 , kde index určuje pozici na ciferníku. Označme si bod B_1 jako druhý průsečík kružnic nad úsečkami A_2A_{12} , A_8A_{12} (jako první průsečík bereme společný bod úseček). B_2 bude druhý průsečík kružnic nad A_2A_5 , A_5A_8 . B_3 druhý průsečík kružnic nad A_8A_9 a A_2A_9 . Ukažte, že B_1 , B_2 a B_3 leží na jedné přímce.

Pozn.: sestrojení kružnice nad úsečkou znamená, že střed kružnice bude ve středu úsečky a krajní body úsečky leží na dané kružnici (úsečka tvoří průměr kružnice)

Úlohu vyřešila rychleji než by Devět věstec řekl švec. Ještě rychleji se však blížila k jeho obličejí váza bílých lilií, která se o něj roztříštila a střepy kolem něj padaly jako sníh na Vánoce. Devět zakřičel bolestí a pak se skácel k zemi omráčený.

ÚLOHA 3.C - GONIOMETRICKÁ BOLEST

Určete přirozené číslo n takové, že platí:

$$\sum_{i=-n}^n \left\lceil \left\lfloor \frac{|i|}{2} \right\rfloor \right\rceil \sin\left(i \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \left\lfloor \frac{|i|+1}{2} \right\rfloor \cos\left(i \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 2054363.$$

Pozn.: $\lceil \cdot \rceil$ představuje horní celou část

Fintě si upravila svůj culík a pak prohodila další vázu (tentokrát s růžovými liliemi) oknem. Jako z akčního filmu proskočila za vázou oknem a přistála na nádvoří přímo na osedlaného koně.

ÚLOHA 3.D - KONVEXNÍ KONINA

Máme čtvercovou síť a v ní souvislý (pro souvislost stačí se dotknout rohem) ohraničený útvar tvořený pouze celými čtverečky. Řekneme, že je takový útvar „čtvercově konvexní“, jestliže pro libovolné dva čtverce v tomto útvaru platí, že spojnice jejich středů leží celá v tomto útvaru. Do každého čtverečku útvaru nyní vepíšeme číslo, určující počet jiných čtverečků útvaru, do kterých se lze z daného čtverečku dostat jedním pohybem šachového koně. Nalezněte (a zdůvodněte proč další neexistují) všechny takové útvary, ve kterých jsou pouze lichá čísla. (Útvary, které jsou navzájem shodné můžete považovat za stejné).

Černý oř se zvedl na zadních a majestátně zaržál. Hlavy všech stráží stojících na nádvoří se otočily jejím směrem. Fintě hravě chytla oře za otěže a přeskočila s ním hradby až na velké náměstíčko, kde se před chvílí srotil dav na králův proslov. Lidí už tam bylo méně, nicméně stále tam chodili okolo stánků, oděni v pestrobarevných hábitech. Rozestoupili se před ohromnými kopyty Fintina koníka. Fintě se ještě trásl ruce, když zabrzdila koně a obrátila se na lidi na náměstí.

„Numeřané! Nenechete si rozkazovat od krále Čtvrtého a věštce Devěta! Jsou to nečistí nedobří lidé! Lžou a svrhli vám krále Třetího! Bojujte za svoje práva!“

Svá řešení uploadujte na našich stránkách:

<https://brkos.math.muni.cz/>