

BRněnský KOrespondenční Seminář



XXXII. ročník
2025/2026

ZADÁNÍ 2. SÉRIE

 n -ÚHELNÍKY

TERMÍN ODESLÁNÍ: 24. 11. 2025

Text psaný kurzívou není součástí úloh. Pokud odesíláš své první řešení, nezapomeň se prosím před jeho odesláním zaregistrovat [na našich webových stránkách](#).

Pro řešení semináře určitě nezapomeňte že přirozená čísla nulu neobsahují!

Finťa začala propadat panice. Začala je možná špatné slovo, Finťa už byla tak hluboko v propasti paniky, že ani nevěděla, že panikaří. Stařenka, která se jí představila jako „Dvojka“, jen sledovala, jak Finťa zoufale ryje do jejího záhonu devítiúhelník.

ÚLOHA 2.1 - $n = 9$

Dokažte, že středy stran libovolného trojúhelníka, paty výšek a středy úseček spojující ortocentrum a vrcholy nemůžou tvořit pravidelný 9-úhelník.

S velkou silou sebou praštila na zem, přímo doprostřed nakresleného devítiúhelníka. Chvilí recitovala nějaká náhodná slova, vzpomněla si dokonce na pár veršů Šla fanynka do zelí, ale ať dělala, co dělala, stále se nacházela na tvrdé zemi uprostřed Dvojčiny zahrádky. „To nebyl devítiúhelník, ne? Nebyl to sedmiúhelník?“ Botou rozkopala svůj původní obrázek a místo něj nakreslila jiný.

ÚLOHA 2.2 - $n = n, m$

Mějme libovolný m -úhelník $A_1A_2\dots A_m$. Ke každé straně připišeme (vně) pravidelný n -úhelník. Podívejme se na n -úhelník u strany A_1A_2 . Označme si bod X v tomto n -úhelníku, který následuje po vrcholech A_1, A_2 . Pak se podívejme na n -úhelník u strany A_2A_3 a označme si Y bod předcházející A_2, A_3 . Pro jaká všechna $3 \leq m, n \in \mathbb{N}$ platí, že $|A_1Y| = |A_3X|$? (Pořadí vrcholů je důležité.)

„To mi nepomůže, že?“ zeptala se stařenky. Ta se jenom zasmála. „Budu to brát jako ne.“ Stařenka se mezitím zvedla z lavičky a ohnutá se šourala pryč.

„A řeknete mi, co mám teda dělat?“

Poprvé ve svém životě byla Finťa sama. Neměla tu rodiče, aby jí jako vždy řekli, co má dělat, jak se oblíkat, kam chodit a kam nechodit, s kým se kamarádit. A pak Fintě došlo, ona tu nemá rodiče, aby jí říkali, co má dělat, jak se oblíkat, kam chodit a kam nechodit a s kým se kamarádit. Doběhla za stařenkou.

„Já myslím, že půjdu do města!“ oznámila jí.

„Dobře,“ pokynula hlavou.

„Vy mě nezastavíte?“

„Proč bych to měla dělat?“

„Já nevím, něco jakože to není tady můj příběh, že potřebujete okopat zahrádku, já nevím!“

„Víš, co? Mohla bys mi okopat zahrádku.“

Stařenka jí podala rýč a teprve teď si Finťa všimla dokonalého šestiúhelníkového záhonu.

ÚLOHA 2.3 - $n = 6$

Nechť $ABCDEF$ je pravidelný 6-úhelník. Zvolme libovolný bod X uvnitř $ABCDEF$. Zobraze tento bod pomocí středové souměrnosti přes středy všech stran a, b, c, d, e, f , čímž získáme body A', B', C', D', E', F' . Dokažte, že šestiúhelník $A'B'C'D'E'F'$ bude mít trojnásobný obsah oproti šestiúhelníku $ABCDEF$.

„Tak já teda půjdu,“ řekla stařence, když už naznala, že její práce je tam hotová.

„Vem si tohle.“ Stařenka vytáhla ze záhybů svého sukna tašku s nápisem $\frac{1}{3}$. „Je po mém manželovi.“

Zaleskly se snad ve stařenčiných očích slzy? Finťa nechtěla být nezdvořilá, ale nějak zvlášť ještě obyčejnou plátěnou tašku nedokázala docenit. Zřejmě se to muselo dát poznat, protože stařenka začala vysvětlovat: „Je to kouzelná taška. Pokaždé, když do té tašky sáhneš, tak vytáhneš něco, co by se ti mohlo hodit.“

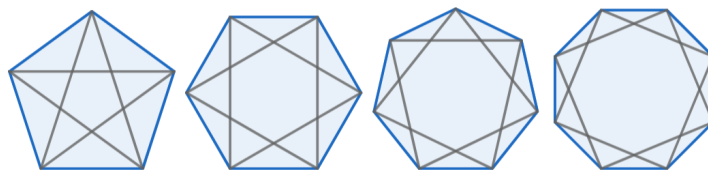
Finťa neváhala a strčila ruku do tašky a opravdu, vytáhla z ní obrovský vojenský spacák. Rozhlédla se kolem a vskutku! Kotouč slunce už pomalu zapadal za obzor a vzduch kolem byl trochu chladnější.

„Vydej se na cestu, než se zatmí úplně. Město je tamtím směrem,“ napověděla babička.

A tak se Finťa vydala na cestu. Musíte pochopit, že Finťa nikdy nebyla lesní typ. Víkendy trávila spíš řešením matematických seminářů nebo chozením po obchoďácích nebo zkoušením nového receptu. Finťa nikdy nebyla moc venkovní typ obecně. Vzduch ale byl svěží a Finťa oplývala nově nabytým pocitem svobody. Usalašila se nakonec v lese, kde si rozložila velký spacák, podložila si hlavu kopou listů a zadívala se nahoru na hvězdy. V tomhle zvláštním, pravidelném světě vypadaly úplně jinak.

ÚLOHA 2.4 - $n = n$ Hvězdičky

V pravidelném n -úhelníku (kde $n \geq 5$) sestrojíme hvězdičku tak, že vždy spojíme vrcholy ob jedno od sebe, viz obrázky. Původní n -úhelník má stranu o délce 1. Jaký bude poměr obsahu původního n -úhelníku ku obsahu nového menšího n -úhelníku uvnitř?



Finťě ani nedošlo, jak moc unavená byla. Usnula na nepohodlné tvrdé zemi a vzbudila se až ráno, když ji na tváři pošimraly první paprsky světla. Vůbec se jí nechtělo ze zahřátého spacáku, ale nakonec sebrala odvalu a vyhrabala se ven. Umyla si obličej v nedalekém potůčku, sbalila spacák do tašky, ve které ihned zmizel, a plátěná taška byla opět lehká jako pírko.

Po chvíli chůze se Finťa ocitla na kraji lesa a dostalo se jí výhledu na město. Podle informací od Dvojky měla dojít přímo do hlavního města Numerské říše, neboli do Čtyřince. Hlavní město prošlo poměrnými změnami v nedávné době, dříve se jmenovalo Pětinec a předtím ještě Třinec. Dvojka jí taky vysvětlovala, že Numerská říše teď prochází turbulentní dobou a že možná ve městě nebude bezpečno. Anyways.

Čtyřinec bylo velkolepé město uspořádané pravidelně do paprskově vycházejících ulic, které

se všechny potkávaly v samém středu, jímž byl hrad Čtvrtek. Což bylo první místo, kam Finťa zamířila. Podle nově přelepené informační tabule se dlouhou dobu myslelo, že byl hrad postaven někdy 3. března, nicméně to ještě nebyla dostavena nejnovější část hradu, tzv. Výklenek krále dobrotivého, a tudíž korektní datum dostavby by mělo být 4. dubna. No a jaké to měla Finťa štěstí, v Numerské říši zrovna bylo 4. 4., jak poznala podle obrovských malovaných plakátů zdobených pravidelnými čtyřúhelníky a velkými čtyřkami. Navíc, jak jí paní v pekárně prozradila, byl dokonce čtvrtek 4. 4. („To se nestává každý rok, víte!“), což znamená, že oslavy mají být ještě bujarejší.

Na balkón hradu vystoupili bohatě odění senátoři. Na hlavách se honosili obrovskými klobouky, které jim zakrývaly většinu obličeje, kterou byla Finťa ráda, že neviděla. Sedli si na zlatě vysázené trůny a přetékali z každého rohu trůnu. Některým museli dokonce sluhové pomoci si sednout či je celou dobu přidržovat, aby po cestě nespadli. Vypadá to, že někteří začali s oslavami už v devět ráno. Lidé z povinnosti jásalí, měli na obličejích přilepené falešné úsměvy a vykřikovali nejasná naučená hesla. Fintě se senátoři přičili, jejich vystupování jí už z tak krátkého setkání bylo odporné.

ÚLOHA 2.A - ODPORNÁ ÚLOHA

Nechť máme $n \in \mathbb{N}$ odporných senátorů s odpory k lidu $R_1, \dots, R_n$, kde všechny odpory jsou kladné racionální zlomky v základním tvaru. Jestliže budou vládnout paralelně, bude jejich odpor k lidu R_p splňovat vztah

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}.$$

Jestliže budou vládnout sériově, bude jejich odpor k lidu

$$R_s = R_1 + R_2 + \dots + R_n -$$

Porovnejte velikost R_p, R_s a dokažte.

Finťa si skládala střípek po střípku obrázek o Numerské říši. Něco vyčetla z informačních tabulí, něco si pamatovala z vyprávění od Dvojky. Snažila se ale velmi tvrdě udělat si vlastní názor. Není totiž to nejlepší přijmout za své volební názor nějaké babičky, která pravděpodobně bude volit kohokoliv, kdo jí zvedne důchody. Nicméně král zůstává nevolen, senátoři jsou voleni, ale jak Dvojka tvrdí, vhazujeme obálky, které ani nikdo neotevře, výsledek voleb je jasný ještě předtím, než vůbec otevrou volební místnosti. Výsledkem jsou tito senátoři, dosazení z vůle krále. Dvojka je nazvala množinou jednoduchých, bezcitných a narcistických čísel.

ÚLOHA 2.B - JEDNODUCHÁ MNOŽINA

Najděte destiprvkovou množinu přirozených čísel s co nejnižším součtem, takovou, že žádný její prvek nedělí součin ostatních. (Dokažte.)

Chtělo se jí věřit. Senátoři jeden po druhém recitovali dlouhý seznam úspěchů, které se jim od posledního kvartálu povedly. Tyto statistiky se konaly čtyřikrát ročně (podle nařízení krále), ale největší se konaly právě 4. dubna, kdy začínal Numerský rok. Splnily se čtvrtletní plány, recitovaly se nové čtvrtletní plány, každý senátor se chlubil tím, co štědrého pro svůj lid udělal.

Fintě se už chtělo odcházet, když v tom zazněla fanfára. Přichází král. Ze všech šatů nejokázalejší, ze všech klobouků nejvrchovatější a ze všech úsměvů ten nejnabubřelejší.

„Jak se jmenuje?“ zeptala se Finťa nějaké paní s malým děťátkem v náručí.

„Vy to nevíte?“ divila se.
 „Nejsem úplně zdejší,“ vmlouvala se Finťa.
 „No přece Čtvrtý.“
 „Karel?“
 „Žádný barel.“
 „No jako Karel Čtvrtý?“
 „To je docela neslušné,“ ohnala se paní, zakryla dítěti hlavičku a poodešla dál.

ÚLOHA 2.C - abc BRO

Řešte soustavu pro $a, b, c \in \mathbb{N}$:

$$a + ab + abc + ac + c = 2025$$

$$a + ab + b = 1057$$

Král vystoupil na balkón. Zahalen v královském ementálu (pozn. autora - Finťa věděla, že je to nějaký druh sýra, ale nevěděla jaký, tak tomu říkala ementál) pokynul hlavou k celému lidu. Zvedl pravici na pozdrav a pak odhalil na hrudi velkou zlatou čtyřku. Davy na pokyn šílely. Když se ale Finťa rozhlédla okolo, nikdo moc radost neměl. Měl nějaký nudný a nezábavný proslov k úspěšnému vstupu do dalšího roku a pak pozval na balkón věštce. „Devěte, prosím tě, jaký bude tento rok, co vidíš ve svých vizích?“ vyzval hřmotným hlasem muže s jednou páskou na oku, který se objevil vedle něj. Devět vypadal už na pohled vyšinutě, o to víc ale když spolu s páskou na oko ze sebe strhl i svůj hábit. Dočista nahý, s jedním hnědým okem a druhým ledově modrým rozpráhl ruce k lidu. Každé oko se dívalo trochu šejdrem, tvrdí se, že tím modrým vidí do budoucnosti.

Vyšinutě začal recitovat:

„Ve svých vizích já vidím ženu,
 s půvabným hlasem a něžným srdcem.
 Znamená ona pro nás velkou změnu,
 však k dobru nebo ke zlu, nezjistil jsem.
 Tričko růžové a kalhoty ji zdobí
 černo-bílá šachovnice,
 její číslo nemá obdoby,
 to je vše a nic už více!“

Než se Finťa stihla vzpamatovat, žena s dítětem, které se předtím ptala, už křičela: „To je ona, to je ta dívka neposedná!“

ÚLOHA 2.D - NEPOSEDNÁ OPERACE

Uvažujme zleva unitární binární operaci $\$$ na přirozených číslech, tedy pro libovolná $m, n \in \mathbb{N}$ můžeme udělat $m\$n$, což bude opět přirozené číslo, a současně existuje nějaké přirozené číslo u , pro které s libovolným přirozeným číslem $u\$n = n$. Řekneme, že takováto operace je *neposedná*, pokud

$$(a \times b)\$c = a \times (b\$c),$$

kde $\times$ značí klasické násobení. Najděte všechny neposedné operace. (Pozn. automaticky nepředpokládejte, že operace $\$$ je komutativní, asociativní nebo distributivní, nemusí být!)

Vojáci ji ostře chytili za paži a napůl dovlekli, napůl donesli před balkón. Vzhledla nahoru a přímo nad ní stál král a stále nahý Devět, sklopila proto znovu zrak, protože tohle vidět rozhodně nechtěla.

„Jaké je tvoje číslo, cizinko?“ pronesl král Čtvrtý a jeho hlas se nesl ozvěnou snad ode všech stran hradu.

Finťa byla zmatená. „Číslo?“

„No přeci, jak ti říkají?“ zasmál se král Čtvrtý, jako by to byla ta nejvíc přirozená věc.

„Říkají mi Finťa.“

Svá řešení uploadujte na našich stránkách:

<https://brkos.math.muni.cz/>