

BRněnský KOrespondenční Seminář



XXXII. ročník
2025/2026

ZADÁNÍ 1. SÉRIE

DŮKAZOVÝ GULÁŠ

TERMÍN ODESLÁNÍ: 20. 10. 2025

Text psaný kurzívou není součástí úloh. Pokud odesíláš své první řešení, nezapomeň se prosím před jeho odesláním zaregistrovat [na našich webových stránkách](#).

Součástí 1. série je studijní text, který ti může pomoci při řešení úloh 1.1. – 1.4. Před řešením těchto úloh výrazně doporučujeme si text projít.

Na zemi se válely prázdné obaly od pizzy, dvoulitrovým PET lahvím od kofoly šlo vidět dno a u země se povaloval hustý dým různých vonných svíček, jejichž rozdílné příměsi útočily na nos, stejně jako kakofonie různobarevných outfitů bila do očí. Na zemi byl rudou rtěnkou (pozn. odstín č. 6 s názvem Bloody Mary) namalován obrovský osmiúhelník, propojený po úhlopříčkách, vložený do obrovské kružnice o průměru asi dva metry, v jehož vrcholu stála jedna z právě zmíněných vonných svíček.

ÚLOHA 1.1 - OSMIOBVOD

Mějme kružnici o poloměru 1 a do ní vepsaný osmiúhelník $ABCDEFGH$. Čtyřúhelník $ACEG$ je čtverec. Určete minimální a maximální obvod osmiúhelníku a formálně dokažte.

Uvnitř osmiúhelníku, se šmouhami od rtěnky na růžovém topu, ležela Finťa. Hlavou u vrcholu s vonnou svíčkou s příměsí skořice a nohama směřujícíma ke speciální edici vonných svíček prodávaných ke Dni matek. V reproduktorech tématickou Bloody Mary vystřídala Abrakadabra od Lady Gagy. Celý čarodějnický výjev vysvětloval otevřený dvojlist v pohozeném teenagery oblíbeném časopise Hrom! Nacházela se v něm totiž rubrika Zoufalé manželky: Jak konečně dostat muže svých snů vysvětlující rituál, kde pomocí sledu úkonů by každá dívka do týdne měla získat kýženeho muže.

ÚLOHA 1.2 - LIŠÁCKÉ SLEDY

Dokažte, že graf obsahuje uzavřený sled liché délky právě tehdy, když obsahuje uzavřenou kružnici liché délky. Délkou myslíme počet hran.

Pozn. Jestli vůbec nevíte, co je to graf, tak se podívejte na pomocný text ke 3. sérii 30. ročníku. (Najdete ho v archivu)

Pozn. Sled je libovolná posloupnost vrcholů, mezi nimiž vede hrana. Kružnice je uzavřená posloupnost vrcholů, mezi nimiž vede hrana a žádný vrchol se neopakuje.

To, co ze začátku možná znělo jako obyčejná dívčí přespávačka, se brzo změnilo v noční můru. K dokončení rituálu bylo potřeba, aby jedna z přítomných dívek zarecitovala kouzelné zaklínadlo.

*„Ve jménu hvězd a měsíční záře,
ať otevře se cesta v lásky tváře.*

*Srdce mé čisté, srdce mé v plameni,
ať láska přijde, když duše znamená.
Ať přijde ten, kdo se mnou být má,
ať duše k duši bezpečně zná.
Ne silou vázán, leč touhou svou,
ať kráčí ke mně cestou pravou.“*

Finťa si na škole nenašla moc kamarádek, dalo by se jim spíš říkat followerky, protože za ní chodí jak její stín, obletují ji jak měsíc planetu a jejich úkolem je sledovat ji na instame-tru a svými likey zvyšovat její oblíbenost. Většina z těchto followerek byla pro život absolutně nepoužitelná, jediná, která měla trochu rozumu v hlavě, si ale vykřičela hlasivky na koncertě Harryho Styluse, proto přednes rituálu měla na starosti jiná. Protože však nechaly okno otevřené a poskládaná báseň se trochu rozfoukala, bylo nutné ji poskládat zpátky. Nikdo si však nepamatoval, jak původní báseň zněla, a tak místo ní přednesla Fintina followerka jakousi permutaci slov původní básně.

ÚLOHA 1.3 - ZMUTOVANÉ MNOŽINY

Máme množinu o n prvcích. K ní máme permutace f_1, f_2 až f_m ne nutně různé. Kolik minimálně musí být m , abychom z těchto permutací vždy mohli vybrat podmnožinu, ze které jde složit permutaci, kde se nějaký prvek z množiny zobrazí sám na sebe?

Poslední, co Fintě slyšela, bylo: „Ve jménu hvězd vázán v plameni cestou“ a pak už jen věděla, že leží na studené kamenné podlaze.

V místnosti, kde probíhal rituál, propukla panika. Ve snaze rychle zachránit situaci jedna z dívek rychle smazala rtěnkou nakreslený osmiúhelník, druhá zavřela všechna okna, třetí skočila do rozmazaného kruhu a praštila se do lokte, čtvrtá zhasla všechny svíčky a tím se navíc v místnosti rozhostila absolutní tma. Dívky zoufale hledaly libovolné předměty na zemi, vrážely do sebe a vydávaly náhodné vysoko položené výkřiky. Dívka, co navštívila koncert Harryho Styluse, ochraptělým hlasem pronesla: „To je ale nadělení.“

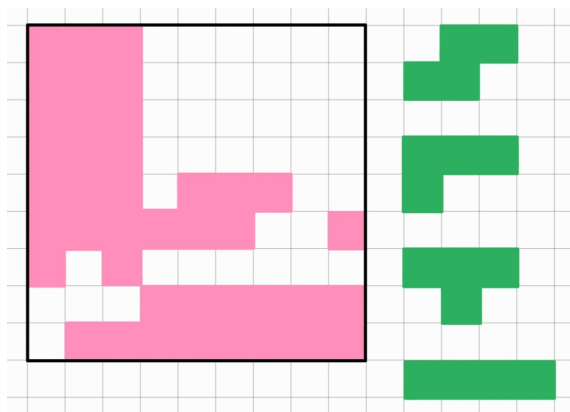
ÚLOHA 1.4 - NADĚLENÍ

Pro přirozené $n > 1$ platí $(n, n-1)(n, n-2)\dots(n, 1) = n^k$, kde k je nezáporné celé a (a, b) je největší společný dělitel a a b . Dokažte, že n je mocnina prvočísla.

Co se dělo nadále, nás však nezajímá a raději se přesuneme za velmi zmatenou Finťou, která už se tedy zvedla ze studené kamenné podlahy. Ihned poznala, že svět, ve kterém se ocitla, není její vlastní, protože všechno bylo mnohem víc... pravidelné, ostré, přesné. Každá hrana měla přesný tvar, každá věc měla své místo. Až na ni. Finťa velice zřejmě v tomto světě přebývala, její zářivě růžový top a šachovnicové rifle bily do očí. Finťa si velice opatrně, aby si nerozmazala řasenku, otřela oči, které jí vlivem neblahých událostí trochu zvlhly, a rozhlédla se okolo. Na zemi vedle ní ležela kamenná opracovaná krychlička, na které bylo vyryto „1/2“. Kousek za ní viděla další kamennou krychličku, trochu menší, na které bylo „1/4“. Protože široko daleko nebylo nic jiného, rozhodla se, že bude následovat tyto krychličky. Když se dostala ke krychličce s vyrytým číslem „1/128“, cestu k další jí přehradily obrovské zábrany z jiných krychliček.

ÚLOHA 1.A - BLOCK BLAST

S použitím vyobrazených 4 zelených útvarů odstraňte z hracího plánu všechna zabarvená (růžová) pole. Každý z útvarů musíte použít právě jednou a nesmíte je převracet ani



Obrázek 1: Hrací plán

otáčet. Útvary vkládáte na plán postupně, pokud je zaplněna celá řada nebo sloupec, okamžitě zmizí.

Udýchaná, ale však, veškeré kostečky se jí podařilo odstranit a cesta se jí uvolnila. Krychličky, podle kterých se orientovala, se ale neustále víc zmenšovaly a byly blíž a blíž k sobě, až je v jednu chvíli skoro přestala vidět a nemusela se ani hnout z místa, aby dorazila k další. Tam Finťa narazila na krásnou zahrádku. V břiše jí zakručelo, neměla odhad, jak dlouho už v tomto světě je, ale co věděla, bylo, že má hlad. Vstoupila dovnitř a rozhlédla se po dlouhých políčkách, kde se v maticovém uskupení pěstovala všemožná zelenina. Rajčata, hrách, mrkev. „Děvenko, nabídni si, trochu kořenové zeleniny!“ ozval se staříčkův hlas.

ÚLOHA 1.B - KOŘENOVÁ ZELENINA

Najděte všechna přirozená čísla y splňující rovnici $4^y - 2^y y - 4y = 0$.

Finťa neváhala, rovnici vyřešila a s hlasitým chřoupáním zlikvidovala několik mrkví. Hlas patřil ženě sedící na konci jednoho záhonku. Finťa si k ní přisedla na lavičku. Žena působila starší než sám čas, oči měla vlídné, záda zkroucená, jak se opírala o holi, na nohou prošoupané pantoflíčky, ruce kostnaté, že jí klouby z prstů nebezpečně vyčnívaly.

„Kde to jsme?“ zeptala se Finťa.

„Říká se tomu Numerské říší,“ odpověděla nezaújatě stařena.

„Numerská říše?“

„Nemá smysl se ptát, myslím, že to brzy pochopíš sama.“

ÚLOHA 1.C - POINTLESS ÚLOHA

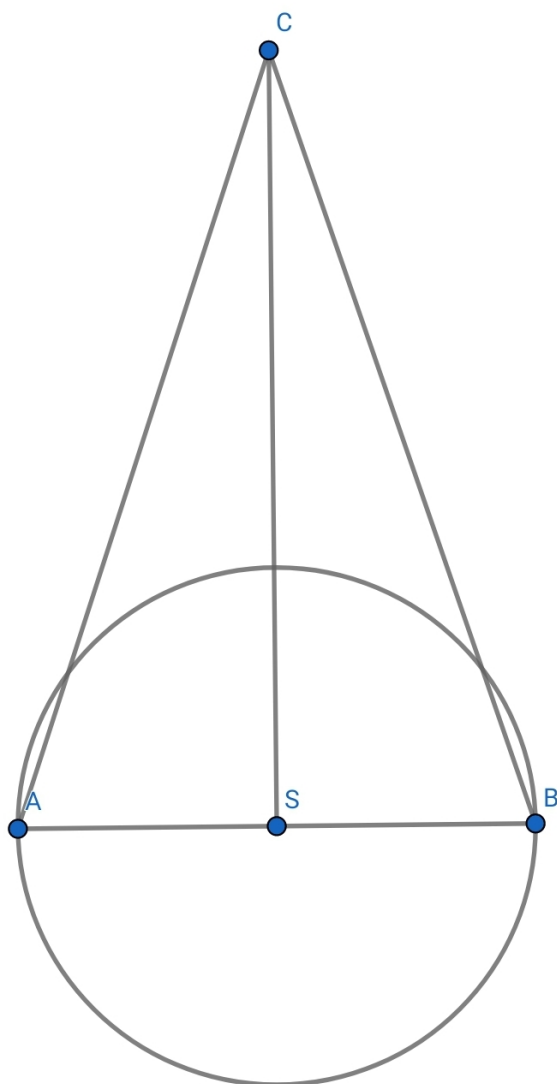
Uvažujme těleso ve tvaru koule sjednocené s kuželem, sdílejícím kruhový průřez. Průřez tohoto tělesa je na obrázku na další straně. Poloměr koule je 1 a výška kužele je 3. Určete objem tělesa.

Finťa se podívala. Stařenku vůbec nepřekvapilo, že Finťa neví, kde je. A současně ji ani nezajímalo, kdo Finťa je.

„Kdo jste vy?“

Stařenka se pousmála. „Já jsem Dvojka.“

„To je zvláštní jméno,“ podívala se Finťa a zadívala se na stařenčina ohnutá záda.



Obrázek 2: Zadané těleso

„Stejně jako Fintša,“ utrousila stařena a vzala z košíku jablko.

„Jak víte, jak se jmenuju?“

„Vím všechno, co vědět potřebuji.“

„Víte, jak se odsud dostanu?“

ÚLOHA 1.D - EKVIVALENTNÍ SLOVA

Mějme abecedu A , která obsahuje 27 písmen. Dále mějme množinu S slov této abecedy, tedy množinu konečných posloupností písmen z A (prázdnou posloupnost nepočítáme).

Protože takových slov je opravdu hodně, budeme na těchto slovech uvažovat rovnosti $xyxz = xz$ a $x^2 = x$, kde $x, y, z \in S$ (tedy to jsou slova a ne písmena). V praxi to znamená, že kdykoliv ve slově bude nějaká podposloupnost xz , potom slovo, co získáme tím, že nahradíme xz posloupností $xyxz$, pro libovolné y , budeme považovat za stejné slovo. A naopak, když $xyxz$ nahradíme xz , budeme též považovat slova za stejná. Stejně tak pro rovnost $x^2 = x$.

Takto se nám ztotožní opravdu hodně slov, například:

$$abc = azabc = azabzbc = azbc$$

Otázka nyní zní, kolik různých tříd slov, co jsme ztotožnili, dostaneme.

„To bych věděla,“ pochlubila se Dvojka.

„Ale neřeknete mi to, protože...“

„Protože ty to ještě vědět nepotřebuješ. V Numerské říši tvůj příběh teprve začíná.“

Svá řešení uploadujte na našich stránkách:

<https://brkos.math.muni.cz/>