

BRněnský KOrespondenční Seminář



XXXI. ročník
2024/2025

ZADÁNÍ 5. SÉRIE

POLYNOMY

TERMÍN ODESLÁNÍ: 24. 2. 2025

Text psaný kurzívou není součástí úloh. Pokud odesíláš své první řešení, nezapomeň se prosím před jeho odesláním zaregistrovat [na našich webových stránkách](#).

Součástí 5. série je studijní text, který ti může pomoci při řešení úloh 5.1. – 5.4. Před řešením těchto úloh výrazně doporučujeme si text projít.

Když si Ňouma na svůj 2025 vision board přilepoval obrázek cestování, rozhodně neměl na mysli cestování do Havlíčkova Bodu. Jeho snem byl Paribik, písčité playasy a bezedné margaritas. Měl to už celé naplánované, dokonce přesvědčil i Koumu, aby jel s ním, podívat se do země jeho oblíbeného filmu - Kirátů z Paribiku. Nebyl to sice nejoblíbenější film, tuto pozici každoročně obhájí Star Bars, na které jednou omylem zašel i Ňouma, protože si myslel, že půjde do Hvězdného baru, ale místo toho se ocitl na promítání Hvězdných mříží, kulturního trháku o vesmírných zlodějích. Ptáte-li se, jak se tedy cestuje do Havlíčkova Bodu, správná odpověď je podzemí. Ve světlých optimistických chvílích naši hrdinové věřili, že podzemní cestování znamená metro. S tím by se smířili, nepreferovali by ho, ale realita byla, jak už to bývá, ještě horší. Jejich nástupním místem byl starý opuštěný důl „Důl nad zlato“.

Jejich průvodcem skrz toto zahádné místo se stal podivný mužík, který sám sebe nazývá Permutoníkem. Drobný mužík zavalité postavy („Musíte být zavalití, aby vás to v dole nezavalilo ha-ha“) je prováděl skrz komplexní kořenový systém podzemí.

ÚLOHA 5.1 - PERMUTONÍK

Permutoník rád permutuje koeficienty kvadratických polynomů. Jednou našel na nástěnce kvadratický polynom, jehož jeden z koeficientů byl 1 a všechny jeho koeficienty jsou po dvou různá přirozená čísla. Dokažte, že Permutoník zvládne permutovat koeficienty tak, aby výsledný polynom měl 2 různé reálné kořeny.

Permutoník je jediným zaměstnancem celého Dolu nad zlato a zřejmě neviděl jinou lidskou duši už nějaký ten čas, rozhodl se tedy povykládat Koumovi s Ňoumou celý svůj životní příběh a k tomu i celou historii Dolu. I přes trefný název se v tomto dole zlato nikdy netěžilo. Tento důl se využíval za války jako primární zdroj prvku Jupiteria, na výrobu štěpného materiálu do atomových zbraní. Zjistilo se totiž, že na rozdíl od Urania, Neptunia nebo Plutonia je svou blízkostí k prvku Sluncium 1000x reaktivnější než předchozí zmíněné prvky. Ke štěstí druhé válčící strany však tuto atomovou zbraň nazvanou FlowRidd-o'-all-Man nikdy nepoužili.

„No a není Jupiterium silně radioaktivní?“ přerušil vyprávění Kouma.

Ňouma provokativně zahvízdá pár not populární písničky od Imaginary Dragons.

„To máš recht,“ odvětlí mu Permutoník, „ale nemusíš se ničeho bát, sto roků tu žiju, sto roků jsem tu koupal Jupiterium, a jsem zdravej jako rybička!“ Usměje se a odhalí poslední dva zbývající zuby. „Ale to je hlavně tím, že mám tuhé kořínky!“

ÚLOHA 5.2 - A JAKO ÁĎA

Najděte všechny celočíselné kořeny polynomů $4x^2 + ax - a$, jestliže je i a a celé číslo.

Cestování pod zemí si Kouma s Ňoumou vybrali zejména proto, že jejich poloha bude neseledovatelná pro kouzla Šim Šal Abíma a Járy Švrkošika. Nebudou je tedy moci pronásledovat jejich profesori a pokoušet se je zabít. Yaaaay! Kdyby však věděli, že celou cestu budou muset strávit v malém železném vozíčku, určeném primárně k přepravování radioaktivního Jupiteria, možná by raději čelili pletacím jehlicím profesorky Hrudkové.

„Já nevím, Ňoumo, proč ze všech lidí jsme to vždycky my dva?“

ÚLOHA 5.3 - RECIPROČ?

Máme normovaný záporně reciproký¹ polynom šestého stupně. Víme, že má právě dva dvojnásobné kořeny a součet těchto kořenů je -4 . Určete tento polynom.

„Jste si jistý, že se dostaneme do Havlíčkova Bodu?“ znejistí Ňouma.

„Hochu, dělám tuhle práci-“ zachrapotí Permutoník

„-už sto roků-“ doplní ho Kouma s Ňoumou.

„- jasně, že vás dostanu na správné místo. Trik je se správně orientovat v tady tom podzemním kořenovém systému. Abyste se dostali na správné místo, potřebujete správné kořeny. K tomu musíte najít ten správný polynom. K vašemu štěstí, já jsem ten správný poly-gnóm ha-ha.“

ÚLOHA 5.4 - POLYGNOM

Mějme zobrazení F , které vezme polynom $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ a vrátí polynom $g(x) = f(a_n) x^n + f(a_{n-1}) x^{n-1} + \dots + f(a_1) x + f(a_0)$. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo n existuje polynom $f(x)$ stupně n , který je poslán zobrazením F

a) Na nulový polynom ($g(x) = 0$)

b) Sám na sebe ($F(f(x)) = g(x) = f(x)$)

c) Rozhodněte, pro která přirozená k existuje v každém stupni polynom, který se zobrazí na svůj k násobek.

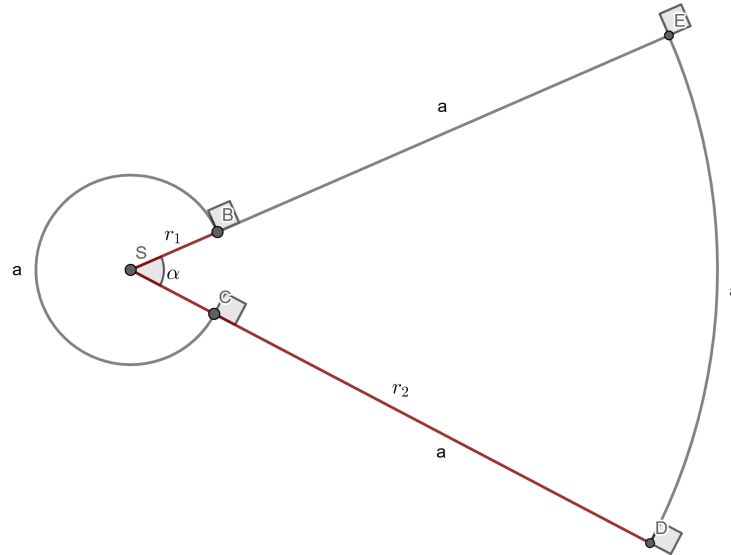
Říká se, že ďábel pracuje rychle, ne ale zdaleka tak rychle jako Permutoník. Než se oba naši hoši nadáli, vystupovali z železného vozíku na druhém konci trati. Havlíčkův Bod je neveliké město na pomezí Světa a Slovenska, ležící na kružnici opsané třem významným městům Práhnou, Bahnu a Jáhnou. Jak najít v takovém malém městečku sídlo dvou zlých černokněžníků? Jak bychom to popsali v moderním jazyce? Šim Šal Abím a Járo Švrkošik rozhodně za své doupe nezvolili nic mid, s architekturou šli all-in. Na kopci za městem totiž stál obrovský hrad, z něhož šel čistý evil-vibe, no cap.

Sídlo černokněžníků byl velký kamenný hrad stojící uprostřed zahrady tvaru pseudočtverce.

¹Záporně reciproký polynom je takový, pro který platí $a_{n-k} = -a_k$ pro všechna $k \in \{0, 1, \dots, n\}$.

ÚLOHA 5.A - PSEUDOČTVEREC

Dva soustředné oblouky kružnic o délce a jsou spojeny kolmými úsečkami délky a tak, že vzniká „pseudočtverec“ o vnitřním úhlu α a straně a , viz obrázek.



Vyjádřete poměr délky strany pseudočtverce a ku poloměru vnitřní kružnice r_1 .

Kouma s Ňoumou vstoupili na pozemek skrz starou zrezivělou branku.

„Vypadá to, že si na bezpečí moc nepotrp-“ směje se Kouma, když v tom na spánku ucítí chladný kov zbraně.

Ňouma však stojí o kousek vedle a jakoby si ho nikdo nevšímal. „Co se to děje?“

Kouma hlasitě polkne a očima poukáže na trávník pod svými nohama. Je mnohem tmavší než ten pod Ňoumovými nohama. Celý trávník je totiž posekaný ve tvaru šachovnice!

ÚLOHA 5.B - SNIPER NA DOSTIZÍCH

Rozhodněte, zda lze vyplnit šachovnici 8×8 pomocí 7 koňů a jednoho střelce tak, že je každé pole ohrožováno alespoň jednou figurkou. (Figurka neohrožuje políčko, na kterém stojí.)

Ňouma však přešlápne na jiné políčko a vtom i on se nachází v kravatě zahaleného střelce.

„MUHAHAHAHA!“ zahřmí Šim Šal Abím z balkónu obrovského hradu.

„HEHEHEHE!“ směje se Járo Švrkošík z terasy, ze stínu kamenného hradu.

„Co máte zase za problém?“ vyhrkne Kouma.

„Proč jste posedlí všechny naše učitele? Proč se nás snažíte zabít?“ křičí zase Ňouma.

„Ale nene,“ sundá si svoje sluneční brýle Járo Švrkošík.

„Kdybychom vás chtěli zabít, tak už jste dávno mrtví!“ rozhodí rukama Šim Šal Abím a uskrne si svoji limonádu.

„Tak co po nás chcete?“

„Ale, ale, přihlásili jsme se tady se Šimim na univerzitu,“ začne Járo.

„a potřebovali bychom pomoci s testem do brkosologie!“

ÚLOHA 5.C - TEST Z BRKOSOLOGIE

Na testu z Brkosologie je 16 otázek. U každé otázky se vybírá ze čtyř odpovědí, z nichž je právě jedna správná. Za každou správnou odpověď získá student 3 body. Za každou špatnou odpověď se mu 1 bod odečítá. Pokud nezaškrtně žádnou odpověď, nebo odpovědi zaškrtně více, nezíská nic. Jaká je pravděpodobnost, že *Járo Švrkošík* získá právě 16 bodů, když náhodně zaškrtně 16 odpovědí? Uvažujte situaci kdy může zaškrtnout i více odpovědí u jedné otázky. Konečný výsledek nemusíte konkrétně vyčíslit.

„To nemyslíte vážně,“ zavrtí hlavou Ňouma.

„Vždyť to by se dalo i natipovat!“ říká Kouma.

„Víte, že existuje něco jako telefon? Že jste nám prostě mohli zavolat a my bychom vám pomohli?“ urazí se Ňouma.

„My jsme ale přece zlí černokněžníci!“

„V čem by byla ta zábava?“

ÚLOHA 5.D - MNOHOÚHELNÍK

Kolik nejméně bodů musíme nakreslit dovnitř konvexního n -úhelníku, aby v každém trojúhelníku, jehož vrcholy jsou vrcholy tohoto n -úhelníku, ležel alespoň jeden bod?

Kouma s Ňoumou sedí v cukrárně. Každý si dal obrovský zmrzlinový pohár, čokoládu se šlehačkou. Přemýšleli předtím, že po takovém zážitku by zašli někam jinam, ale bylo přece jenom deset hodin ráno.

„Hele, Koumo. Co kdybychom to zabalili?“

„Zabalili jako co?“

„Jako kufry! Já nevím, mě nebaví být jenom nějakou postavičkou v nějakém příběhu. Vždyť se tady pět sérií honíme jenom proto, abychom zjistili, že tady ti dva blázni potřebují pomoc s testem do brkosologie!“

„Mohli jsme umřít!“

„No právě!“

„Já chci dovolenou.“

„To ti dovoluju.“

„Dík.“

„Tak co příště ten Paribik?“

Svá řešení uploadujte na našich stránkách:

<https://brkos.math.muni.cz/>