

BRněnský KOrespondenční Seminář



XXXI. ročník
2024/2025

ZADÁNÍ 4. SÉRIE

KRUŽNICE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 24. 2. 2025

Text psaný kurzívou není součástí úloh. Pokud odesíláš své první řešení, nezapomeň se prosím před jeho odesláním zaregistrovat [na našich webových stránkách](#).

Součástí 4. série je studijní text, který ti může pomoci při řešení úloh 4.1. – 4.4. Před řešením těchto úloh výrazně doporučujeme si text projít.

Naši oba hrdinové nemohou mít stání. Jejich nejhorší noční můry se proměnily v realitu. Dobře, možná ne ty nejhorší, Koumův největší strach je, že by zapomněl na člen 2ab při roz-násobování a Ňoumův zase to, že by se ze záchodové mísy vyplazil had. Každopádně členové učitelského sboru Brkosovic se nacházejí pod nějakým zvláštním kouzlem a snaží se teď naše hrdiny zabít. Ještě k tomu ve zkouškovém, jaká to smůla.

„Nemůžeme utíkat nadosmrti,“ ztěžka oddychuje Kouma.

„No, ty možná ne, ale já můžu být rychlejší než ty,“ pošouchne ho Ňouma, zakrývající svoje přerývané nádechy.

„Musíš být pořád takovej? Chtěl jsem říct, že bychom měli najít Šim Šal Abíma a Járu Švrkošíka napřímo! Takhle nás jenom honí jejich poskoci!“ rozlítí se Kouma.

Ňouma bez mrknutí oka nastaví nohu běžícímu profesorovi Topůrkovi. „Vždyť jsme je ale minulý ročník hledali skoro pět sérií, jak to chceš udělat tentokrát?“

„Tak pojď, myšlenka. Kde by se asi mohli usídlit?“

„No, Járo Švrkošík nedá dopustit na to svoje Slovensko.“

„A Šim Šal Abím zase na Svět.“

„Járo Švrkošík by se nikdy nepřestěhoval ze Slovenska.“

„Šim Šal Abím zase ze Světa.“

„Takže hledáme průnik těchto dvou zemských částí!“

ÚLOHA 4.1 - DELTOID

Mějme deltoid $ABCD$ vepsaný do kružnice $k(S, r)$, přičemž $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle CDA|$; kružnici $Slovensko(A, |AB|)$; kružnici $Svet(C, |BC|)$. Určete velikost úhlu (interval) BAD tak, aby:

- S leží v průniku **kruhů** určených kružnicemi $Svet, Slovensko$,
- S leží v průniku **kružnic** $Svet, Slovensko$.

„No a to je kde?“ ptá se Ňouma.

„Výborná otázka!“

„Počkej, ty to nevíš?“ zasměje se Koumovi Ňouma. „Tady velký génius to neví!“

„Sice to nevím, ale aspoň vím, kde se zeptat. Spolužáci mi říkali o nějakém novém kouzle, jmenuje se to ChataGPS. Když tam prý zajedeš, tak se můžeš zeptat na lokaci čehokoliv na zemi!“

„Mě by docela zajímala poloha těchto bodů.“

ÚLOHA 4.2 - SIGMOID

$ABCDEF$ je šestiúhelník vepsaný kružnici k , kde $AB = BC$, $CD = DE$ a $EF = FA$. Ukažte,

že AD , BE a CF se protínají v jednom bodě.

„Ty seš ale Ňouma! K tomuhle se to nepoužívá.“

„No a kde se ta ChataGPS nachází?“

„Vím, koho bychom se na to mohli zeptat!“

„ChatyGPS?“ zasmějí se oba hrdinové.

Na zemi zasténá profesor Topůrka. Vypadá to, že si udělal něco s rukou. Ňouma si ale vzpomene na jeho přednášky o topologii a bezmilosti do něj kopne. „Víš, kde se nachází tadyta ChataGPS?“

„Vlastně vím! Je to taková malá dřevěná chatička v obci Slámohrady! Chodíval jsem tam jako malý, na ryby, pak jsem tam pozval i zbytek učitelského sboru...“

ÚLOHA 4.3 - NEMOCNÍ

Mějme konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Vepíšeme kružnici k_1 trojúhelníku ABD a k_2 trojúhelníku BCD . Kružnice k_1 se strany BD dotýká v bodě X , kružnice k_2 se strany BD dotýká v bodě Y . Ukažte, že $X = Y$, jestliže je $ABCD$ tečnový čtyřúhelník.

Pokračování vyprávění našťěstí Kouma s Ňoumou neslyšeli, dozvěděli by se totiž spoustu věcí o svých profesorech, které můžou být rádi, že neznají.

Nedalo tomu dlouho a ocitli se naši hrdinové přede dveřmi malé ChatyGPS. Okolíčko to je malebné. Potůček protékající okolo, čerstvě posekaná tráva. Rozdělaný táborák.

ÚLOHA 4.4 - BACHA NA OHEŇ

Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník s různými délkami stran. S_a, S_b, S_c jsou po řadě středy stran a, b, c . Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům AS_bS_c, BS_aS_c a CS_aS_b se protínají v jednom bodě a ukažte, že tento bod leží na přímkce určené středem kružnice opsané trojúhelníku $S_aS_bS_c$ a těžištěm trojúhelníku ABC .

„Jak se k tomuhle přistupuje?“ ptá se Kouma.

„Tak já bych prostě zaklepal,“ zkusí Ňouma.

Ihned po zaklepaní se otevrou dveře a v nich stojí dvě ženské postavy. Jedna vysoká, hnědo-vlasá, druhá menší, blondřatá.

„S čím ti můžeme pomoci?“ zeptají se jednohlasně.

„Zeptej se mě na cokoliv!“ řekne první.

„Poradím ti s dárkem pro mámu!“ řekne druhá

„Řeknu ti, jak založit úspěšné podnikání!“

„Udělám ti cestovní itinerář na míru!“

Ňouma se zazubí. „Tak to mě by zajímal ten dárek pro mámu!“

„Ráda ti pomůžu! Abych mohla navrhnout ideální dárek pro tvou mámu, zkus mi říct něco víc o ní:“ začne první.

„Jaké má zájmy nebo koníčky?“ pokračuje druhá.

„Preferuje praktické nebo spíše sentimentální dárky?“

„Máš nějakou konkrétní cenovou představu?“

„Například, jestli má ráda zahradničení, knihy, kosmetiku, nebo třeba dobré jídlo, můžeme najít něco na míru.“

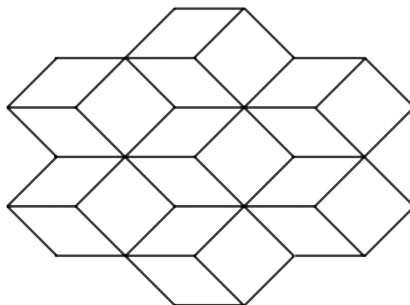
„Nechceš-li uvádět, zkusíme něco praktického, co ocení všichni.“

„Co třeba takováto stavebnice z krychliček?“

ÚLOHA 4.A - KRYCHLIČKY

Rozhodněte, zda lze vyplnit všechna políčka tabulky na obrázku čísly 0 – 10 tak, že platí zároveň:

1. pokud čísla m a n leží v políčkách sousedících stranou, 3 nedělí $(m - n)$,
2. žádné dva šestiúhelníky nemají stejný součet čísel.



„Myslím, že tohle Ňoumova máma neocení,“ ukončí ukázkou Kouma.

„Dej mi vědět, kdybys ještě něco potřeboval,“ souhlasně řeknou a zavřou za sebou dveře.

Kouma s Ňoumou si vymění zmatené pohledy. „Co to bylo?“ Nicméně se ale dodrzkotali až do Slámohradů a jsou odhodlaní zůstat, tak dlouho, jak to bude nutné, než získají svoji odpověď. A tak je to tentokrát Kouma, co buší na dveře.

„S čím ti můžeme pomoci?“ zeptají se jednohlasně obě, když vyjdou ven z chalupy.

„Takhle to může jít až do nekonečna!“ zazoufá si Ňouma.

ÚLOHA 4.B - 2-FIBONACCI

Definujme posloupnost čísel P_n následovně:

$$P_0 = 0$$

$$P_1 = -1$$

$$n \geq 2 : P_n = P_{n-1} + P_{n-2} + (-1)^n \cdot F_n$$

Kde F_n je n -tý člen Fibonacciho posloupnosti, definované jako

$$F_0 = 0$$

$$F_1 = 1$$

$$n \geq 2 : F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

V závislosti na n určete P_n .

„My hledáme město, které je na pomezí Světa a Slovenska,“ ujme se komunikace Ňouma.

„Hledáš město, které je na pomezí Světa a Slovenska. Takové město může být:“ odpoví monotónně ta vyšší.

„Vlašské klobouky. To je malebné městečko na jihovýchodě Vínokraje, v okrese Zloun,“ recituje blondýnka.

„Hodnovín. Malinkatá vesnička rozměru jeskyně na jihu Vínokraje, na pomezí Slovenska. Na celé ploše se nachází jen jedna samoobsluha a všichni obyvatelé hovoří prazvláštním jazykem.“

„Havlíčkův Bod. Poloměsto nacházející se na kružnici opsané Práhnou, Bahnu, Jáhnou. Velmi milí přivětiví lidé, obtížně se hledá.“

„TO BUDE ONO!“ jása Kouma!

„Havlíčkův Bod! To je řešení!“

ÚLOHA 4.C - ZWYX

V závislosti na $a \in \mathbb{R}$ určete počet řešení soustavy rovnic pro $x, y, z, w \in \mathbb{R}$:

$$x^2 + y^2 + zw = a$$

$$y^2 + z^2 + xw = 2a$$

$$w^2 + x^2 + yz = 3a$$

$$z^2 + w^2 + xy = 4a$$

Za oběma dívkami se zase zavřou dveře. Naši hrdinové se radují. „Havlíčkův Bod! To musí být ono, doslova to leží na kružnici opsané, kde jinde by se ti dva schovávali!“ mne si ruce Kouma.

„Tak jdeme!“ zavelí Ňouma.

„Ale kam?“ uvědomí si zničehonic Kouma.

„Ale ne, já už se jich nechci ptát znovu!“

...

„S čím ti můžeme pomoci?“ zeptají se jednohlasně obě dívky, když vyjdou ven z chalupy, potom, co je naši hrdinové zavolají.

„Hele, a jak se dostaneme do Havlíčkova Bodu?“ zeptá se Ňouma.

„Pokud se chcete dostat do Havlíčkova Bodu, musíte nejprve do města na Slovensku, pak teprve do Havlíčkova Bodu, žádná přímá cesta ze Světa na Slovensko neexistuje a protože Havlíčkův Bod je na Slovensku musíte...“

ÚLOHA 4.D - KRUŽNICE

Mějme n měst ve státě Svět a m měst ve státě Slovensko. Platí, že mezi dvěma městy může existovat přímá cesta (která neprochází žádným jiným městem) pouze pokud jsou v jiném státě. Avšak ne mezi všemi městy, které jsou v různých státech, vede přímá cesta. V závislosti na n a m najděte největší k takové, že mezi městy může existovat k přímých cest, ale přitom se nikde nevytvoří "kružnice/cyklus"- tedy pokud Kouma s Ňoumou pojedou autem a nebudou se po cestě vracet zpátky, nikdy nedojedou do města, kde již byli.

„Řekni mi to jednodušeji!“ poručí Kouma.

„Máme dva státy, Svět a Slovensko...“ začne jedna.

„Ne zas tak moc jednoduše, tohle my víme!“ naštve se Ňouma.

„Nechť A, B jsou státy...“ začne zase druhá.

„To je ale úplně k ničemu! Vy nechápete, co my chceme?“ zuří už Kouma.

„Ne, jsme totiž KRRRRRR...“ řekne vysoká.

„...a KIIIIIII...“ doplní blondáta.

„... a jsme terky na baterky dostupné jen v úterky!“ dokončí vysoká a praští za sebou dveřmi.

„Koumo, víš, kde jsme?“ zeptá se Ňouma.

„V pěkný bryndě?“ zasměje se Kouma.

„Spíš v pěkný bryndze!“

Svá řešení uploadujte na našich stránkách:

<https://brkos.math.muni.cz/>