

BRněnský KOrespondenční Seminář



XXXI. ročník
2024/2025

ZADÁNÍ 3. SÉRIE

INVARIANTY

TERMÍN ODESLÁNÍ: 6. 1. 2025

Text psaný kurzívou není součástí úloh. Pokud odesíláš své první řešení, nezapomeň se prosím před jeho odesláním zaregistrovat [na našich webových stránkách](#).

Součástí 3. série je studijní text, který ti může pomoci při řešení úloh 3.1 – 3.4. Před řešením těchto úloh výrazně doporučujeme si text projít.

Organizátoři turnaje se rozhodli nedat našim dvěma hrdinům oddych. Mediální pozornost je tam, kde ji přesně potřebují, zatlačili proto na Brkosovickou zahradnici Ame Rolníkovou a nechali ji po vzoru nejmenované kouzelnické frančizy vysázet na pozemky obrovské bludiště. Stěny bludiště sestávaly z rostlinek tújí, které ale přes noc dorostly výšky 10 metrů, protože na ně slečna Rolníková aplikovala záhadný přípravek, který používá na svoje vlasy. (Ňouma si poznamenal do svého imaginárního deníčku, že by se jí měl pro osobní účely zeptat, jak se ten přípravek jmenuje). Na špičce každé túje roste šiška. Úkolem našich soutěžících je, aby dosáhli určitého počtu šišek v celém bludišti za daný časový limit.

„Mohl bys mi aspoň trochu pomoci?“ křičí Ňouma na svého kamaráda, zatímco se jako hladová koala drží túje.

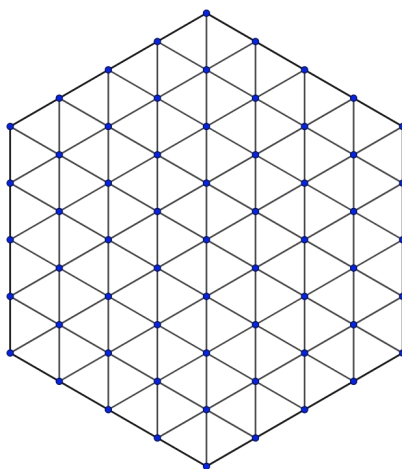
„Nemá to smysl,“ odpovídá Kouma, přičemž si počká, než je Ňouma skoro na vrcholu, aby mu tuto informaci sdělil.

„Co to zase meleš? Můžeš s těma tvýma negativistickýma...“ našťěstí zbytek Ňoumovy věty odnesl vítr zuřící mezi vršky tújí.

„Tahle soutěž je zmanipulovaná, nemůžeme vyhrát.“

ÚLOHA 3.1 - ŠESTIÚHELNÍK

V šestiúhelníku rozděleném na 96 trojúhelníků jsou na každém z 61 bodů dvě šišky. V každém tahu musíme na každý ze tří vrcholů jednoho zvoleného nejmenšího trojúhelníku přidat jednu šišku. Může nastat situace, kde je na každém bodu 2024 šišek?



„Nemohl jsi to říct dřív?“ ucedí mezi nádechy Ňouma, kterému se bezpečně podařilo slézt z túje zase na zem.

Kouma tuto Ňoumovu otázku ignoruje, protože jakákoliv odpověď by si vysloužila jeden z Ňoumových kombatanových chvatů. (Ňouma totiž v jednom semestru navštívoval filipínské bojové umění a všem pořád vyhrožuje, že je na ně použije, nikdo ale neví, že při hodinách kombatanu nejvíce modřin způsobil sám sobě, když se pokoušel napodobit chvaty svého mistra.)

„Co budeme dělat teď?“ zeptá se, trochu bezmocně, Ňouma.

„Třeba je to zkouška, jestli na to přijdeme?“ snaží se to vylepšit Kouma.

Ňouma se okamžitě chytá toho stébla, který mu jeho kamarád hodil. „Takže pořád můžeme vyhrát! Pojď!“

„Kam jdeme?“

„No přece za organizátory, říct jim, že jsme vyhráli.“

jako ze Spongeboba O půl hodiny později.

„Tuhle túji jsem už viděl,“ poznamená Kouma.

„Protože všechny vypadají úplně stejně!“ ohradí se frustrovaně Ňouma.

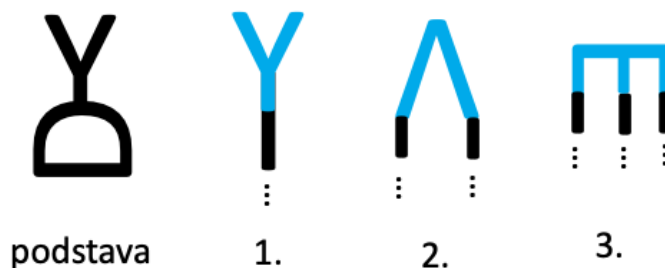
„Až na tady tento strom,“ ukáže Kouma na rostlý dub.

ÚLOHA 3.2 - DEVY VĚTVÍ VĚŽE

Strom DEVY má podstavu ve tvaru písmene D, ze které trčí Y. Kromě toho máme neomezený počet písmen E, V, Y a větví se. V každém kroku musí stromu přidat jedno patro o výšce jednoho písmenka. Může stavět následujícími způsoby:

1. na jednu větev stromu umístí písmeno Y a stanou se z ní tak dvě nové větve,
2. na dvě sousední větve umístí písmeno V vzhůru nohama a spojí je tak do jedné větve,
3. na tři sousední větve umístí písmeno E otočené o 90° tak, že z nich žádná větev nepokračuje.

Rozhodněte, zda existuje strom, který v posledním patře nemá žádnou volnou větev, tzn. Devy všechny větve ukončil písmeny E.



cink cink ozve se zvonek bicyklu a zpoza dubu se vynoří štíhlá ženská postava s helmou.

„Slečna Rolníková?!“ diví se Kouma s Ňoumou.

Slečna Rolníková elegantně sesedne ze sedátka a dramaticky si přehodí dlouhý cop přes rameno.

„HOUBO se ZLOUBOU!“ zahřmí povědomým hlasem a ukáže na Koumu s Ňoumou prstem, „tohle je váš konec.“

„Mám pocit, že tohle mi už někdo říkal,“ odvěti znuřeně Ňouma.

„Jo zrovna minulý týden,“ vysvětluje Kouma.

„když jsme Fintě sebrali jídlo,“ pokračuje Ňouma.

„má dost divný vztah ke svým hranolkám,“ doplní Kouma.

Slečna Rolníková nasupeně zakroučí hlavou. „Vy to nechápete, že? Tady můj miláček“ – láskyplně pohladí dub, přičemž si Kouma s Ňoumou vymění zděšené pohledy – „za chvíli vyrostete, a stane ... se... z... něj...“

„Hele my na to nemáme úplně čas, jo? My musíme jít,“ odbyde ji Ňouma.

„strašlivý...“ – Kouma si zívne a poklepe na hodinky – „...DRAK!“

ÚLOHA 3.3 - DRAK

Drak má n hlav. Když mu usekneš 2 hlavy, naroste mu dalších $k + 2$ hlav, kde k je počet hlav před useknutím a vzápětí mu upadne $s(k)$ hlav, kde $s(k)$ je ciferný součet k . Když mu usekneš 11, narostou mu dvě hlavy. Jiné počty hlav mu sekat nelze, musíš tedy useknout právě 2 nebo právě 11 hlav. Pro která n dokážeš draka zabít? Draka zabijeme tak, že usekneme právě tolik hlav, kolik jich aktuálně má.

Každý konec větve se začne formovat do tvaru dračí hlavy. Ostré zuby, pronikavé jantarové oči. Kořeny stromu se mění na obrovské hnáty s drápy. Se zlověstným smíchem slečny Rolníkové se ozve i dračí řev.

„Utíkej!“ křičí Ňouma a za paži táhne svého ztuhlého kamaráda.

Zatáčí mezi tújemi bludiště a to se jim před očima mění. Zatáčky se kroučí opačným směrem, túje jim vráží pod nohy kořeny. Mohutný drak přeskakuje z túje na túji a neustále je svým odporným dechem oběma hrdinům v patách. Kouma s Ňoumou zatočí doprava, běží, zatočí doleva, přeskočí keř a dívají se přímo do žlutých hadích očí. A to je to poslední, co si oba hrdinové pamatují.

Z doby než se probudili samozřejmě. Ne, že by umřeli, to bychom neměli o čem psát v dalších sériích. Oba hrdinové se totiž probudí živí v Brkosovické nemocnici za rytmického pípání srdečního měřáku.

ÚLOHA 3.4 - NSD

Kouma má na displeji svých měřáků všechna přirozená čísla od 1 do 2024. Sestřička si vždy vybere dvě čísla, ta se smažou a místo nich se na displeji objeví jejich nejmenší společný násobek a největší společný dělitel. Pan doktor hlídá, že součet čísel na displeji neklesne pod 1500000. Ukažte, že to se nikdy nestane.

Kouma s Ňoumou přicházejí k sobě. Všechno je bolí. Těžko se jim dýchá. A jejich stavu rozhodně nepřispívá fakt, že na rozvrzané bílé židličky vedle nich sedí Říďa.

„Myslel jsem se, že váš obličej už neuvidím,“ pochechtne se Říďa a s hlasitým vrznutím si poposedne.

„Nás se jen tak nezbavíte,“ usklíbne se Ňouma a sykne bolestí.

„Nemyslíte si doufám, že celá tato záležitost je mým konáním, že ne?“ nakloní se Říďa a na čele se mu objeví vráska. Vlastně je to asi poprvé, co ho Kouma s Ňoumou vidí vyděšeného. Oba hrdinové se na sebe podívají, oni vědí, že něčeho takového by Říďa nebyl schopen. A oba

dva přesně vědí, kdo má na jejich životy posváčeno a kdo nebohou slečnu Rolníkovou donutil vypěstovat draka. Proběhne mezi nimi jakási tichá domluva, kterou můžeme přeložit asi takto:

Ňouma varovně vytřeští na Koumu oči = dáváš pozor, co se tady děje?

Kouma se strachem v očích přikývne = vím; a vím, že to vůbec není dobrý.

Ňouma tázavě pozvedne jedno obočí = řekneme mu to?

Kouma si skousne ret = myslíš, že to pochopí?

Ňouma zavrtí hlavou = musím překládat, co to znamená?

„Samozřejmě, že si to nemyslíme!“ usměje se Kouma.

„Od vás? To nikdy pane řediteli!“ práskne rukama Ňouma a Kouma po něm střílí dalším pohledem, balancují na tenkém ledě. Ale Ňouma na něj jen mrkne, ví, co na Říďu platí.

ÚLOHA 3.A - MRK

Mějme ostroúhlý trojúhelník MRK a 3 různé kružnice. Střed každé kružnice je zároveň středem strany trojúhelníku MRK a dále platí, že na každé kružnici leží právě 2 vrcholy trojúhelníku. Dokažte, že všechny průsečíky těchto kružnic leží na stranách trojúhelníku MRK.

„Udělám všechno, co je v mých silách, abych zjistil, kdo za tímto útokem stojí. Promluví si rázně se slečnou Rolníkovou. A to jsem si myslel, že pěstování trávy ve školních sklenicích je to nejhorší, co se mi v učitelském sboru může stát,“ ujišťuje je Říďa. Všichni tři ale vědí, že v moment, kdy se Říďa vrátí do své kanceláře, na celý incident se zapomene a po drakovi nikdo ani nevzdechne.

Sotva za ředitelem cvaknou dveře, už mají Kouma s Ňoumou hlavy u sebe.

„Já tomu nemůžu uvěřit!“ máchá rukama Ňouma.

„Já jsem seriózně věřil, že nám ti dva kouzelníci dají už pokoj.“

„Neměli jsme je nechávat bez dozoru. Šim Šal Abím a Járo Švrkošík jsou moc silní kouzelníci.“

„Ani jsem nevěděl, že jde něco jako ovládnout mysl ostatních!“

„Já taky ne! Vždyť přece slečna Rolníková je tak hodný člověk!“

Kouma s Ňoumou mají nařízený klid na lůžku. Naštěstí vyvázli jen s mírnými škrábanci a díky včasné záchráně hasičského sboru (bylo zábavné pozorovat boj drakova ohně a hasičské hadice, kterou nakonec použili jen k tomu, aby svázali drakovy končetiny) nemají ani nic zlomeného. Doktoři pouze začali léčit Koumovo pálení záhy, které jim Ňouma vysvětloval, že má jeho kamarád pouze ze zapálení pro matematiku. Dostalo se jim několik návštěv od Finí, nejvíc je však překvapilo, když je navštívila jejich profesorka Hrudková.

„Jak je?“ zeptá se jich mile.

„Asi dobře?“ odvěti překvapený Kouma.

„Musíme zkontrolovat, že je s vámi všechno v pořádku. Jak se jmenujete? Kolik vám je? Jaká je vaše oblíbená zmrzlina. Najděte áááá...“

ÚLOHA 3.B - NAJDI A

Najděte všechna reálná a taková, že existuje reálné c takové, že rovnice $ax^2 + 3x + c = c^2$ má právě jedno řešení.

Profesorka Hrudková si odloží batoh na jejich noční stolek. „Nemáte hlad, hoši? Já jsem totiž ještě nevečerala!“ zasměje se a odloží masožravou rostlinku, kterou má z nějakého důvodu v batohu, na parapet.

„Něco jsem vám totiž upekla!“

ÚLOHA 3.C - PERNÍK

Profesorka Hrudková pekla perník. Uvažme čtverec perníkového těsta o délce 1 metr. Do něj náhodně vykrojila kruhový perníček o průměru 0,5 metru. Jaká je pravděpodobnost, že se jí poté do zbytku těsta podaří vykrojit ještě jeden stejně velký kruhový perníček, pokud ho tentokrát může vykrojit na libovolném místě?

„To je ale škola,“ chechtá se Ňouma a podává si na talířek kus perníku, „jedna pěstuje trávu, druhá peče perník!“

„Děkuju, já si perník nedám,“ řekne významně Kouma, který je vůči návštěvě profesorky Hrudkové dost skeptický.

„Proč bys nechtěl perník? A děle, a děle jsem ho pekla doma, aby byl pěkně měkoučký!“ zamračí se a poupraví si svou divoce barevnou košili.

Ňouma pochopil, co se Kouma snažil naznačit a odkládá talířek na svůj noční stolek. „Já jsem totiž, chytil od Koumy to šálení záhy, teda pálení záhy.“

„No dobře, když to nepůjde po dobrým! Tak to půjde po zlým!“ vytáhne z brašny dvě ostré pletací jehly a vyskočí na židli.

V tu chvíli vyskočí i z postele Kouma s Ňoumou, vytrhnou ze sebe všechny hadičky a utíkají. V jednu chvíli běží první Kouma, pak Ňouma, pak profesorka Hrudková. Pak zase Ňouma, Kouma a jim v patách profesorka Hrudková. V nějakou chvíli jako v dětských animacích běží první i profesorka Hrudková a oba hrdinové jí v patách.

ÚLOHA 3.D - ZÁKEŘNÁ INJEKCE

Mějme množinu uspořádaných trojic přirozených čísel L_3 (tzn. záleží na pořadí čísel v trojici). Tuto množinu můžeme lexikograficky uspořádat: máme-li dvě uspořádané trojice $a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3)$, potom $a > b$, pokud $a_1 > b_1$ nebo $a_1 = b_1$ a $a_2 > b_2$ nebo $a_1 = b_1, a_2 = b_2$ a $a_3 > b_3$ (podobně jako seřazení slov podle abecedy). Najděte zobrazení f z L_3 do reálných čísel takové, že pokud $a > b$, pak $f(a) > f(b)$ a zdůvodněte.

„A-n-dělo!“ křikne někdo a Kouma s Ňoumou stojí tváří v tvář profesoru Topůrkovi, který proti nim drží napřaženou kytaru. „Nepotřebujete pomoc, paní kolegyně?“

„Tak mám pocit, že jsme v pěkný kaši,“ oznámí Kouma.

„Někdy tě naučí nějaký lepší hlášky, než že jsme v kaši,“ řekne Ňouma.

„Mám snad říct, že jsme v pěkný bryndě?“

„To jsem taky nemyslel.“

„Každopádně to vypadá, že se proti nám spiknul celý učitelský sbor!“

Svá řešení uploadujte na našich stránkách:

<https://brkos.math.muni.cz/>