BRněnský KOrespondenční Seminář

XXXI. ročník
2024/2025

ZADÁNÍ 2. SÉRIE

ZBYTKY

TERMÍN ODESLÁNÍ: 25. 11. 2024

Text psaný kurzívou není součástí úloh. Pokud odesíláš své první řešení, nezapomeň se prosím před jeho odesláním zaregistrovat na našich webových stránkách.

Součástí 2. série je studijní text, který ti může pomoci při řešení úloh 2.1. – 2.4. Před řešením těchto úloh výrazně doporučujeme si text projít.

Čas strávený přípravou na Turnaj Koumovi s Ňoumou uběhnul až moc rychle. Zanedlouho do jejich školy přijela i delegace ze zbylých dvou zúčastněných. První školou byla tzv. Letoška, profláklá škola v menším městě Brkosně. Druhou školou, která nyní okupuje chodby Brkosovic, je nějaká škola ze zapadlého městečka Švrčkův Brod.

ÚLOHA 2.1 - MODULO

Nalezněte všechna $k \in \mathbb{N}$, pro která je rovnice

$$4n^3 + 3n^2 - n \equiv 0 \mod k$$

splněna pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

*Z každé školy byly vybráni dva kandidáti, šampioni, kteří se utkají v Turnaji s ostatními dvojicemi. Narozdíl od Brkosovic obě školy měly o Turnaj nebývalý zájem a nějaké řízení na šampiony proběhlo. Kouma s Ňoumou byli vybráni na základě metody „nic-lepšího-nemáme“. Šampiony ze školy Letoška se stala dvojice Kukáš Lycl a Klubko Desát, známí v matematickém světě pod jmény Kuky a Desy. Kuky se minulý rok stal světovým šampionem v SMO (spací matematické olympiádě), kde se mu ve snu povedl vyřešit jeden z problémů Tisíciletí. Desy zase proslul jako organizátor soutěže B-SH (vtip v názvu této soutěže tkví v podobnosti anglické nadávky b***sh** a bolestivých šifer, ze kterých se soutěž skládá). Velká část přípravy Koumy s Ňoumou sestávala ze zjišťování slabin jejich protivníků. Podle Ňoumových slov totiž, „jsou špatní, ale ostatní určitě taky“. Najít slabinu Kukyho a Desyho ale nebylo pro ně nikterak náročné.*

ÚLOHA 2.2 - SEXY PATNÁCTKA

Určete poslední dvojčíslí čísla $15^{15^{15}}$. Uveďte postup bez kalkulačky.

Druhou dvojicí protivníků jsou Rea s Láďou. Přípravu proti těmto dvěma notně podcenili, protože jejich původní myšlenkou bylo, že v soutěži je zničí prostý fakt toho, že jsou to jediné ženy a byly vybrány pravděpodobně proto, aby škola ze Švrčkova Brodu splňovala jisté normy. Nicméně tyto předsudky jim obě velice rychle vyvrátily, když dorazily do Brkosovic a byly nejen velice rychlé, ale také okouzlující a oproti klukům i se silným nadáním pro sociální události.(Pozn. autora - autor není nikterak zaujat, popisuje obě soutěžní dvojice absolutně objektivně). Slabinou dvojice Rey a Láďi se posléze ukázala podobnost. Příjezd matematických legend poukázal na další fakt, kterému Kouma s Ňoumou museli čelit. Zjistili totiž, že vůbec nejsou populárními postavami matematického světa. K nevíře. Mnozí ani nevěděli, že existují.

Úloha 2.3 - Neexistujé, a co když tu jéé

Dokažte, že existuje nekonečně mnoho přirozených čísel, která nelze zapsat ve tvaru $n^{2a} + m^{2b} + 4^c$, kde a, b, c, m, n jsou nezáporná celá čísla a $c \neq 0$.

Už o nich byla napsána celá jedna série nějakého matematického semináře, přesto ale ani účastníci toho semináře často neví, kdo Kouma s Ňoumou jsou. A to dokonce zachránili svět (a Mezisvět, Kazisvět, Podsvět,... a Slovensko) před hrozbou dvou černokněžníků. (No nic, zpátky k věci, autorova deprese počká.) Turnaj přitáhnul pozornost médií a tím i široké veřejnosti. Říďa byl celý týden bez sebe štěstím, když si třásl rukou se známými osobnostmi, mezi kterými třeba Nunchuck Borris, jediná žijící osoba, která se dostala na konec desetinného rozvoje čísla pí. Nad jeho stolem v kanceláři teď visí fotografie s Oktoberinem Popelnajsem, kterého mladší studenti znali zejména jako autora slavné Popelnajs-Weiss nerovnice. Kouma s Ňoumou samozřejmě sledovali všechny rubriky, články a skeče ohledně Turnaje. Nejhorší však bylo, když sledovali zprávy na TV Supernova, den před prvním kolem a reportérka pojmenovala jejich soutěžní dvojici jako „Zbytky“.

Úloha 2.4 - Zase je tu teserakt

Zbytek $a \mod b$ nazvěme teseraktovým zbytkem modulo b, pokud existuje nějaké přirozené číslo x takové, že $a \equiv x^4 \mod b$. V závislosti na prvočíslu p určete počet teseraktových zbytků modulo p.

„Taková nehoráznost,“ nadává Kouma a významně pochoduje ze strany na stranu. „To si jako myslí, že jsme úplně neschopní?“

„Já myslím, že je to dobrý,“ odvětí mu nezaujatě Ňouma.

„A jako proč?“

„Nemají od nás očekávání. Oni nás podceňují. My jsme se na ně připravili. Víme, jak obě dvojice rozložit. O nás to vědět nebudou! My máme totiž sílu přátelství!“

„Ty seš vážně hroznej blbec, víš to?“ rezignuje Kouma. „Běž se střelit prosimtě.“

Úloha 2.A - Ilumináti chtějí Lukáše mrtvého

Ňouma se má jít střelit. Stojí v bodu L na kružnici k a střílí. Pod jakými úhly od tečny t ke kružnici k v bodě L musí vystřelit, aby se kulka dvakrát odrazila a opět jej zasáhla? Kulka se v kružnici odráží jako světlo od tečny v daném bodě.

Nálada je pochmurná. Naštěstí se kolem dvanácté ozve lehoulinké zaklepání na jejich pokoj.

„Dále?“ podiví se Kouma s Ňoumou. Finťa elegantně proklouzne dovnitř do pokoje a pousměje se na chlapce.

„Teď fakt ne, Finťo, musíme makat, zítra máme první kolo,“ odbyde ji Ňouma.

„Však já vím, že máte první kolo. Já vám přišla pomoc,“ culí se Finťa.

(Nebojte, následující část je mládeži přístupná. Nebo alespoň trochu). Fintě se totiž nějakým neznámým způsobem (Koumu s Ňoumou se nenapadlo ji zeptat) povedlo zjistit, co má být první kolo soutěže. Tentokrát byl na ni i Kouma hodný. Celou noc pak s Finťou místo důkazů Gaussova vzorce (který si úplně zcestně mysleli, že by mohl být součástí prvního kola) hledali výherní strategii.

ÚLOHA 2.B - COKOLIV JEN NE GEOMETRIE

Mějme tabulku 1×7. Na této tabulce hrají hru dva hráči. Jeden má červené kamínky a druhý modré. Hráči střídavě hrají tahy se svými kamínky podle následujících pravidel:

1) Na každém poli může být maximálně jeden kamínek.

2) Hráči se střídají po tazích, při každém tahu musí dojít k nějaké změně v tabulce.

2) Hráč může pohnout doprava svým již umístěným kamínkem v tabulce, jestliže při přesunu přeskočí alespoň jeden kamínek libovolné barvy a žádné prázdné pole.

3) V případě, že hráč nemůže či nechce udělat výše uvedený tah, musí umístit nový kámen své barvy na první neobsazené pole tabulky zleva .

4) Hráč prohrává, jestliže umístí kamínek na poslední pole v řadě (nejvíce vpravo).

Jako první hraje hráč s červenými kamínky. Určete, zda existuje výherní strategie pro některého z hráčů, formulujte ji a dokažte, že je výherní.

První kolo dopadlo suverénně pro Koumu s Ňoumou. Rozhodčí žasli. Davy jásaly. Závislí změnili sázky. Diváci ohlodávali televizory. Téměř přes noc se Kouma s Ňoumou stali miláčky a favority turnaje. Spolužáci, mladí, staří, ženy, dívky, všichni chtěli autogram, fotku, podpis (nejen na skripta). Kouma si pozornost neužíval. Zato Ňouma? Velmi. Když si pak sedli společně na oběd obklopil je dav zuřivých fanoušků a Ňouma je bavil svými žoviálními vtípky a vyprávění o průběhu prvního kola. Z celého jeho projevu ale jaksi vypadlo Finťino jméno, a naopak zářilo ŇOUMA A KOUMA. Během toho navíc pomrkával na jednu mladou slečnu ze Švrčkova Brodu. Finťa si ale samozřejmě nemohla nechat ujít takovou velkou oslavu a celé představení viděla.

„Ty jsi takový omezený blbec. Omezenej, hloupej, mmmmm, blbec! Napadlo tě někdy, že se všechno netočí jenom kolem tebe? Že nejsi středobod celýho vesmíru?!“

ÚLOHA 2.C - STŘED VESMÍRU

Dokažte, že omezená neprázdná množina v rovině nemůže být středově souměrná podle dvou a více různých středů. Množina se nazývá omezená, jestliže existuje kružnice s konečným poloměrem taková, že celá množina je uvnitř této kružnice.

S těmito slovy se Finťa zvedne a hlasitě odkráčí z jídelny. Ňouma se po ní jen hloupě ohlédne. „Co má za problém?“

„Ty vážně nevíš?“ podiví se Kouma a rozhodne se za Finťou jít.

Ňouma se otočí zpátky ke svému obecenstvu. „Finťa si včera při kreslení náčrtku blokla záda,“ vymyslí si, aby zvědavé fanoušky ukonejšil a pokračuje v líčení zuřivého boje.

ÚLOHA 2.D - PŘI KRESLENÍ NÁČRTKU JSEM SI BLOKLA ZÁDA

Mějme trojúhelník ABC a ke každé straně rovnostranný trojúhelník připsaný (AXB, BYC, CZA). Dokažte, že se úsečky AY, BZ, CX protínají v jednom bodě.

Kouma se tedy vydá utěšit rozrušenou Finťu. Ňouma zůstane osamocen mezi svými obdivovateli. Kdo by tušil, že se tohle na tom turnaji stalo? Já ne. Oni ne. Ale dva černokněžníci smějící se z povzdálí si mnou ruce. Finťa splnila svou roli a prozradila chlapcům to, co jí řekli. Všechno jde podle jejich plánu.

Svá řešení uploadujte na našich stránkách:

`https://brkos.math.muni.cz/`

BRKOS Team