BRněnský KOrespondenční Seminář

XXXI. ročník

2024/2025

ZADÁNÍ 1. SÉRIE

Důkazový guláš

TERMÍN ODESLÁNÍ: 30. 10. 2023

Text psaný kurzívou a ani nadpisy úloh nejsou jejich součástí. Pokud odesíláš své první řešení, nezapomeň se prosím před jeho odesláním zaregistrovat na našich webových stránkách `http://brkos.math.muni.cz/`.

„Vstávej semínko“, řve budík v pokoji. Ňouma s velikou námahou se natahuje pro telefon a vypne svůj budík, než uslyší i „bude z tebe fiala“. Kouma zašmátrá pro svoje brýle a věnuje Ňoumovi otrávený výraz.

„Asi jsme to včera trochu přehnali,“ zachraptí Ňouma.

„Hlavně rychle vstávej, nebo zas budeme pozdě u profesora Topůrky,“ popohání ho Kouma, vzpomínaje na chvíle, kdy ho velice neotřelým způsobem přišel vzbudit jejich učitel matematiky Antal Topůrka.

Rychle na sebe navlékli školní uniformu a přesunuli se do Malé síňky, kde si vzali papírek s rozcvičkou.

ÚLOHA 1.1. **Pythagorovy nemilostné poměry** Dokažte, že neexistuje pravoúhlý trojúhelník s celočíselnými délkami stran takový, že délka jedné strany dělí nějakou jinou.

Kvůli únavě nebyli schopni vyřešit matematický úkol, a tak se spokojili jen s češtinářským, kde teda Kouma musel Ňoumovi trochu poradit, protože namísto větného členu tam Ňoumovi pořád vycházely nějaké psí cosi a to profesor Topůrka vzít nechtěl.

„Teda kluci, vy jste takoví frajeři!“ zapiští Finťa a přisedne si za klukama. Koumovi frekvence Finťina hlasu zřejmě moc dobře neudělá a vyjádří svůj nesouhlas zamručením.

„Proč?“ podiví se Ňouma s hrůzou v očích.

„Ty si to nepamatuješ?“ zahihňá se Finťa, „není divu, vždyť ses nebyl schopný ani trefit do tamtěch dveří!“

ÚLOHA 1.2. **Podobnost** Mějme dveře tvaru obdélníku $ABCD$ a body K na AB, L na BC, M na CD a N na AD tak, že $ABCD$ je podobný s $KLMN$ a zároveň tyto obdélníky nesplývají. Dokažte, že $ABCD$ je čtverec.

Než Finťa stihla připomenout veškeré události včerejšího večera (stihla zmínit pouze spoustu zajímavých věcí ohledně zpívání písniček od kapely Závěs, hraní Gina z flašky a nějakou eskapádu obsahující kapotu profesorova auta) ozval se z rozhlasu ředitel Brkosovic pana Řídi: „Prosím naše šampiony Koumu s Ňoumou, aby se s neprodlením dostavili do ředitelny. Opakuji. Prosím naše šampiony Koumu s Ňoumou, aby se s neprodlením dostavili do ředitelny. Také připojuji hlášení, že v bufetu dnes došel kečup, takže se párky budou prodávat pouze s horčicí. Děkuji.“

Kouma s Ňoumou na sebe vrhnou nevěřícný pohled. Šampioni? To nevěstí nic dobrého. Co se to vlastně všechno včera stalo?

BRKOS Team

ÚLOHA 1.3. KAGH Nechť x, y jsou reálná čísla větší než 1. Ukažte, že

$$\frac{x}{\sqrt{y^2-1}} + \frac{y}{\sqrt{x^2-1}} \geq 2.$$

Pan Říďa byl zrovna uprostřed čtení vzdělávacího plátku Právíčko pojednávajícího o všech soudních procesech, které jsou v hledáčku všech žurnalistů v celém Světě. Nejožehavějším tématem byl zrovna soudní proces Honzy Depky a Jantar Heartové, medializovaný zejména na sociální síti χ.

„Hoši!“ usměje se na ně Říďa a v přátelském gestu roztáhne ruce, „už jsem se bál že žádné šampiony mít nebudeme. Ale po vašem loňském výkonu jsem věděl, že je na vás spolehnutí.“

Ňoumu přestává bavit to chození kolem horké kaše. „Mohl byste se už prosím explicitně vyjádřit?“

ÚLOHA 1.4. Indukce Mějme funkci f danou rekurentním vztahem $f(1) = 1$ a $f(n) = 2f(n-1) + n - 3$. Vyjádřete ji explicitně a indukcí dokažte správnost své definice.

Pan Říďa je velice překvapen Ňoumovým bezprostředním přístupem, ale nenechává se zastrašit. „No jsem moc rád, že jste se přihlásili do toho Turnaje tří matematických škol! Stala se teda trochu chyba, a místo jednoho šampiona nám náš algoritmus vyhodil kandidáty hned dva.“

Oběma hochům se začne ve stejnou chvíli svítat. Matně vzpomínají, jak museli porazit ohnivou kružnici (tzv. firewall), aby se dostali ke skriptu napsaném v Blaiseovi (ne že by to byl zrovna Koumův typ) a do něho zadat svoje jména, aby se přihlásili do nějaké soutěže.

ÚLOHA 1.A. Nudím se na supersymetrii Uvažujme ohnivou kružnici k o poloměru r a na ní dva různé body A, B, které neleží naproti sobě. Pak se tečny ke k v bodech A, B protínají v bodě X. Ze znalosti délek $r, |AB|$ určete vzdálenost $|AX|$.

„Za nějaký čas dojedou i studenti ostatních škol, se kterýma se můžete utkat,“ říká jim ředitel, „vašim úkolem mezitím bude podívat se na tuto tabulku doporučené literatury.“

ÚLOHA 1.B. Tabulka z Wishe Kouma s Ňoumou dostali tabulku o rozměrech $n \times n$, která byla vyplněna čísly následovně:

1	2	3	4	...
2	2	3	4	...
3	3	3	4	...
4	4	4	4	...
...	...	...	...	...

Jaký je součet čísel v tabulce v závislosti na n? Výsledek zapište ve tvaru podílu dvou celých čísel.

Po návštěve ředitelovy kanceláře se Kouma s Ňoumou okamžitě odeberou do knihovny. Vzpomenou si totiž, do čeho se to vlastně minulou noc přihlásili. Turnaj tří matematických *škol je přeslavná soutěž, kvůli katastrofám, které se každé rok stanou. Třeba v minulém ročníku někdo objevil další paradox, který rozbil celou teorii množin, o dva ročníky dřív zase zvítězil nějaký deváťák a zahanbil tím celou generaci vysokoškoláků, o deset let zpátky prý někdo dokázal, že 0=1 a rozhodčí to omylem prohlásili za korektní řešení (tento nejmenovaný rozhodčí pak opustil svůj post učitele a odebral se do Nadsvěta chovat křečky). Kouma vytáhnul svůj tablet a začal prvním doporučeným příkladem, Kouma se nad Ňoumovým necitelnictvým naštval a vzal mu tužku z jeho tabletu.*

ÚLOHA 1.C. Lea smazala Devymu polynom a Devy je z toho zdrcen Ňouma smazal Koumovi polynom. Kouma si zapamatoval pouze to, že měl celočíselné koeficienty, byl normovaný, součin všech jeho koeficientů a jeho stupně byl 12 a měl kořen 2. Jaké všechny polynomy mohl Kouma mít?

„To snad nemyslíš vážně!" ohradí se frustrovaný Kouma.

„Ne! To ty to nemyslíš vážně! My jsme se přihlásili na tady tu příšernou soutěž a ty to jen tak přijmeš?"

„A co si myslíš, že s tím jako chceš dělat? Přihlásili jsme se dobrovolně, z toho není cesty zpátky!"

„Vždyť v tom můžeme umřít!"

„Nemůžeme couvnout. Tak se musíme jenom připravit na to nejhorší ZLO!"

ÚLOHA 1.D. ZLOmek V závislosti na n určete rozmístění čísel a_n, tak, aby měl zlomek

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

maximální hodnotu, pokud platí, že mezi čísly a_1 až a_n je každé číslo od 1 do n právě jednou. Svoji odpověď dokažte.

Co ale oba hoši netušili je, že to není samotná hra, co jim pořádně zavaří. Možná v tom můžou mít prsty nějací dva černokněžníci...

Svá řešení uploadujte na našich stránkách:

`http://brkos.math.muni.cz/`

BRKOS Team