BRněnský KOrespondenční Seminář

XXX. ročník
2023/2024

ZADÁNÍ 5. SÉRIE

KONVEXNÍ HRÁTKY

TERMÍN ODESLÁNÍ: 29. 04. 2024

Text psaný kurzívou není součástí úloh. Pokud odesíláš své první řešení, nezapomeň se prosím před jeho odesláním zaregistrovat na našich webových stránkách.

Součástí 5. série je studijní text, který ti může pomoci při řešení úloh 5.1. – 5.4. Před řešením těchto úloh výrazně doporučujeme si text projít.

Přestože pan Švrkošík působil podle odhadů Koumy s Ňoumou velice staře, držel s oběma hochy nevídané tempo (prý si udržuje takovou kondici, jen díky nějakému zázračnému lektvaru dělaného z borovic) a cesta zpátky jim utíkala mnohem rychleji, než cesta do Cauchyc. Jaro Švrkošík doprovázel jejich putování svým vyprávěním, příběhy, znalostmi, náhodnými fakty a notnou dávkou smyšlených událostí. Vynechával dokonce jídlo, protože by to znamenalo, že by na chvíli musel přerušit svůj dalekosáhlý monolog. V jedné takové chvíli vysvětloval, že cesta ze Slovenska do Světa je vždy kratší, kvůli zvláštnímu poměru a zakřivení časoprostoru.

ÚLOHA 5.1: Mějme trojúhelník ABC. Nechť bod P leží na straně AC a dělí ji v poměru $\frac{|AP|}{|PC|} = 4$, stejně tak nechť bod Q leží na straně BC a platí $\frac{|CQ|}{|QB|} = 4$. Nechť bod S je střed úsečky PQ. Dokažte, že bod R takový, že S je středem úsečky CR, leží na straně AB a platí $\frac{|AR|}{|RB|} = 4$.

Přes nepřeberné množství témat, které se povedlo panu Švrkošíkovi vyčerpat (od jeho traumatického dětství, po všeobecné otázky vesmíru, života a vůbec, na než našel všechny odpovědi skýtající se v čísle 43), bylo jedno ožehavé téma, kterému se pan Švrkošík vyhýbal jako čert kříži. To by ale nebyli Kouma s Ňoumou, aby nebyli zvědaví proč.

„Pane Švrkošík?“ ozve se pod dlouhé době Ňouma.

„Mhm?“ zmohl se překvapený Jaro Švrkošík, kterého zrovna přerušili v myšlenkách o rovnoběžkách a afinních kombinacích.

ÚLOHA 5.2: Nechť A, B, C jsou různé body v rovině, které neleží na přímce. Dokažte, že množina afinních kombinací $\{kA + lB + mC : k + l + m = 1\}$ tvoří přímku rovnoběžnou s BC právě tehdy, když je koeficient k konstantní.

„Neberte si to osobně,“ změří si pohledem stařičkého matematika Kouma, „ale proč jsme měli vyhledat zrovna vás v boji proti Šim Šal Abímovi?“

Jarovi oči potemněly stejně jako obloha, když se konečně rozhodnete, že půjdete běhat. „Studuju Šim Šal Abímovu práci už po staletí. Znám jeho triky lépe než kdokoliv jiný.“

Ňouma věnoval Koumovi jak-může-být-starý-když-sleduje-jeho-práci-po-STALETÍ-pohled a Kouma zakoulel očima ve stylu já-to-radši-nechci-vědět. Koumovi s Ňoumou samozřejmě tahle odpověď nestačila, protože jako každý, kdo četl povinnou matematickou příručku „Jak mít nějaké přátele“, věděli, že je něco, co jim Jaro Švrkošík neříká. Na další vyptávání ale nebyl čas, protože už dorazili ke sluji Šim Šal Abíma. Koumu s Ňoumou to zklamalo, očekávali něco velkolepého, něco na styl Batmanova úkrytu, nebo hororového domu, ne obyčejný žluto-červený *sedmipatrový panelák.*

„Jeho dům má skvělé zabezpečení, aby se tam nedostala nechtěná návštěva. Projdou jen ti, co jsou toho hodni," vysvětlil pan Švrkošík. Vzal si na dveřích přivázanou tužku, přiložil svůj prst na nenadepsaný zvonek a vyslechl si krátkou vstupní úlohu.

ÚLOHA 5.3: Dokažte, že kruh nelze získat jako konvexní obal konečně mnoha bodů v rovině.

Kouma s Ňoumou si oddychli, že vzali s sebou Jaro Švrkošíka. Za prvé by nevěděli, jak vůbec dům Šim Šal Abíma najít. Za druhé by už vůbec nezvládli vyřešit tuhle úlohu, kterou pan Švrkošík vyřešil, aniž by si vlastně vůbec něco napsal, jenom poslušně odvykládal do mikrofonu celý důkaz. Kouma s Ňoumou se na sebe uznale podívali a vstoupili za starým kouzelníkem dovnitř. Čím blíž byli Šim Šal Abímovi, tím méně Jaro Švrkošík mluvil. „Je tu zvláštní ticho, to tu nikdo nebydlí?" pokusil se starého kouzelníka převést na jiné myšlenky Kouma.

„Ne. Kdysi to byl regulérní obytný dům, bydlela tu spousta lidí. Ale pak jak se Šim Šal Abím zbláznil, tak se začal od všech izolovat. Začal lidi nenávidět. Údajně skoupil všechny tyhle byty a jejich obyvatele vystěhoval."

„Páni, to hodně vysvětluje," ošil se Ňouma.

„Nemějte mu to za zlé, prošel si těžkými věcmi. Buďte ale připraveni na všechno."

Celá trojice se sípáním došla až do šestého patra, ke dveřím s velkou devítkou. Jaro Švrkošík si přiložil prst na rty a naznačil hochům, aby byli potichu. Nasadil si svou béžovou kapuci a vytáhl zpod opasku kružítko a nachystal ho do útočné pozice, Kouma vytasil své oblíbené logaritmické pravítko („prehistorické, ale nikdy nevíš, kdy se může hodit"). Ňouma se plácnul po kapsách a rychle nachystal svoji záložní bagetu s extra porcí rajčat.

Jaro Švrkošík vytáhnul ze své kapsy klíč a potichu otevřel dveře. Trojice se ocitla uvnitř malého bytu. Přímo proti nim stála stařičká postava a pochutnávala si na teplé polívčičce.

„Ani hnout!" křikl muž, „držím... lžíci!" Zamyslel se a pak na ně vytasil lžíci a pokropil je trochou vývaru.

Tak tam všichni čtyři stáli, zbraně nachystané a začala bitva.

ÚLOHA 5.4: Nechť S je množina n bodů v rovině, kde $n \geq 3$ je přirozené číslo. Dokažte, že je-li bod x obsažen v konvexním obalu S, pak existuje alespoň $n-2$ trojic $\{V_1, V_2, V_3\}$ bodů z S tak, že $x \in conv(V_1, V_2, V_3)$.

„Logaritmus!" čaroval Jaro Švrkošík a Šim Šal Abím ho zkušeně zderivoval, a převrácená hodnota z x se od něj jenom odrazila.

„Tangens!" vrátil útok Šim Šal Abím, jakoby to ale vytušil, poslal už proti němu Jaro Švrkošík příslušnou cyklometrickou funkci a obě kouzla se s velkým třeskem zrušily uprostřed.

„x^n," seslal Šim Šal Abím na Koumu svou lžící. Kouma ale rychle funkci zintegroval a poslal mu zpátky silnější $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ vzorně i s konstantou.

„$5^{\frac{1}{n^2+n}}$!" neúprosně útočil Šim Šal Abím, ale Ňouma, poučen z minukých sériií rychle spočítal součin nekonečné posloupnosti a zbylá pětka ho jen drobně škrábla.

„e^x," kouzlil Jaro Švrkošík. Šim Šal Abím, ale obratně funkci zderivoval a poslal ji nazpátek. Koumu s Ňoumou stihla nepřipravené a vyrazila jim logaritmické pravítko a bagetu z ruky. Jaro Švrkošík jen tak tak stihnul seslat e^{-x} a účinkům kouzla se vyhnul.

Stáli tam tak naproti sobě, Jaro Švrkošík odhodlaně, zahalen ve svém béžovém plášti s vytaseným kružítkem a proti němu, jako zrcadlový obraz Šim Šal Abím ve své černé pletené dece, *v jedné ruce misku s vývarem a v druhé vytasenou lžíci.*

„Ciferný součet!" zvolal Šim Šal Abím a z jeho lžíce vyšla prazvláštní zelená záře. Jaro Švrkošík rychle nastavil své kružítko a řekl „jen těch jejichž ciferný součet je větší než ciferný součet jejich druhé mocniny!"

Šim Šal Abímovi se zkroutila pusa do vítězoslavného úšklebku, když se uprostřed setkaly jejich kouzla. „Těch je ale stále nekonečně mnoho!"

Úloha 5.a: Dokažte, že existuje nekonečně mnoho přirozených čísel, jejichž ciferný součet je větší než ciferný součet jejich druhé mocniny.

Zelené světlo přehlušilo Švrkošíkovo červené a srazilo ho na kolena, jeho kružítko spadlo opodál. Šim Šal Abím opatrně položil lžíci zpět do své polévky a překonal vzdálenost mezi nimi.

Jaro Švrkošík k němu zvednul pohled a z hlavy mu spadla kapuce, která do té doby zakrývala jeho obličej. „Šimi?" řekl prosebně.

„Jaro," vydechnul měkce Šim Šal Abím, pak ale jako lusknutím prstu se zamračil. „Co si myslíš, že tady děláš?"

„Něco, co jsem měl udělat už dávno," posmutněl Jaro Švrkošík a Šim Šal Abímovi přeběhla přes obličej spousta emocí, kterou nebyli Kouma s Ňoumou schopni rozšifrovat.

„Udělal jsem totiž kdysi velkou chybu," otočil se na Koumu s Ňoumou, „pracovali jsme s Šimim spolu na jedné velice důležité teorii."

„Švrkošíkův teorém?" zeptal se Kouma a Šim Šal Abím na něj vycenil zuby.

„Ano. Pracovali jsme na tom spolu, byl to náš společný nápad, náš společný odkaz. Když mi ale v Brkosovicích nabídli, že mi zvýší plat, pojmenují ten teorém po mě a udělají mi dokonce sochu, když ji odprezentuji sám, bez Šimiho na jedné konferenci. Zpychl jsem. Myslel jsem si, že mi to zapříčiní věčnou slávu a všechno, a místo toho jsem jen ublížil příteli. "

„Zuřil jsem," navázal na jeho vyprávění Šim Šal Abím, „věřil jsem ti, myslel jsem si, že tě práce se mnou baví stejně tak jako mě. Ale ty jsi mi místo toho bodnul nůž do zad. Komu jsem měl věřit, když jediný člověk, na kterém mi záleželo, mi udělal takovouhle věc? Napáchal jsem hrozné škody. Vyhodil nevinné studenty od zkoušek, vystěhoval nebohé sousedy a ještě k tomu napadl vaši školu."

„Žádný matematický problém by neměl být problémem mezi dvěma přáteli," šeptl Jaro Švrkošík.

„Omlouvám se," řekli ve stejnou chvíli Šim Šal Abím a Jaro Švrkošík.

„Starý brachu," usmál se pan Švrkošík.

„Kolik je to promarněných let?" zeptal se Šim Šal Abím a oba se poplácali po zádech.

„Um?" odkašlal si Ňouma, „to je všechno, takže se můžeme vrátit do školy?"

„Jo, ohledně vaší školy," podrbal se za uchem Šim Šal Abím. „schoval jsem ve skříňkách u tělocvičny bombu."

Úloha 5.b: Mějme čtvercovou síť 4×6, kde každé pole je (po řádcích) označeno čísly $113 - 136$. Úkolem je rozhodnout, zda existuje cesta po polích taková, že každé pole projdeme právě jednou. Z každého pole se lze pohnout podle čísla, kterým je označeno. Nechť pole na kterém stojíme má číslo n.

1. Pokud je n sudé, lze použít tah šachového koně. Pozor - nelze přitom udělat 2 takové tahy za sebou.
2. Pokud $3 \mid n$, lze použít tah šachového střelce, avšak alespoň o 2 pole.

3. Pokud $5|n$, lze se přesunout na libovolné sousední pole (i diagonálně)
4. Pokud $7|n$, lze se pohnout na kterékoliv jiné pole jehož číslo je dělitelné sedmi.
5. Pokud je n prvočíslo, lze se pohnout pouze na pole s ním středově souměrné.

Pokud není jednoznačně určený typ pohybu, lze zvolit libovolný povolený.

„Viděl jsem to ve filmech, stačí prostě přestřihnout ten červenej drátek!“ radil Ňouma, když se jim konečně podařilo dostat do té správné skříňky.

„Měli jsme vzít Šim Šal Abíma s sebou“ postěžoval si Kouma, když vytáhnul ze skříňky obrovskou černou blikající krabičku plnou TNT.

„Prosimtě, ten si prvně musí popovídat s panem Švrkošíkem a než bychom ho sem dostali, tak by ta bomba dávno vybuchla,“ poukázal na zářivě červený ciferník, který ukazoval něco víc než pět minut.

Kouma s Ňoumou sice chytli první šalinu, která je dostala do Brkosovic coby dup, než se ale vymotali skrz celou školu, evakuovali ji a vyslechli si Fintin vyděšený monolog, uběhla snad celá věčnost.

„No a teď by tam měla být někde matematická úloha, kterou musíme vyřešit.“

Ňouma výrazně zakoulel očima a vytáhnul papírek s matematickou úlohou.

„Jdeme na to?“

ÚLOHA 5.C: Uvažujme trojúhelník, o němž víme, že součin jeho délek jeho stran je roven 64. Ukažte, že potom platí odhad $6r + \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \geq 12$, kde r je poloměr kružnice opsané. Pro které trojúhelníky ze zadání nastává v tomto vztahu rovnost?

Než nadiktovali černé krabičce řešení celé úlohy, ciferník se nebezpečně přiblížil nule, ale zastavil se přesně na času 0:07. Kouma s Ňoumou si hlasitě oddechli a lehli si vyčerpáni na zem.

„Možná jsme, jak v nějakém akčním filmu,“ poukázal na číslo na ciferníku Kouma. Ňouma se otočil tak akorát, aby viděl Koumův obličej a pak oba dva vyprskli smíchy. Chvíli se tam svíjeli na zemi až je začalo bolet břicho.

„Nezajdem na jídlo?“ zeptal se Kouma.

„Rozhodně,“ přitakal Ňouma, který v zápalu boje přišel o svou bagetu s extra porcí rajčat. „Co třeba na Indii?“

„Dáš si zase kormu?“

„Tradice je tradice.“

Když Kouma s Ňoumou vystoupili na Brkosovické zahrady, zaplavila je hromada spolužáků a učitelů, kteří jim chtěli pogratulovat. Slyšeli dokonce skandovat svá jména a po chvíli je někdo vzal na ramena a pak si je posílali nad hlavou, jako na rockovém koncertě. Když oslavy konečně skončily, ocitla se před dvojicí přátel Finťa a oba dva je objala.

„Tak teď jsi národní hrdina Ňoumíku,“ zamrkala na něho svýma modrýma očima. Kouma jenom obrátil oči v sloup.

„Víš, máme za domácí úkol nějaký matematický problém, nechtěl bys mě ho doučit?“ usmála se Finťa a ukázala mu zadání.

ÚLOHA 5.D: Finťa myslí na normovaný polynom stupně n, jehož konstantní člen je nenulový. Označme horní celou část $\frac{n}{2}$ jako k. Ukažte, že pokud Finťa odtajní Ňoumovi k kořenů a k koeficientů svého polynomu, zvládne již uhádnout celý polynom.

BRKOS Team

Ňouma vytřeštil oči na Finťu a všimnul si za ní svého kamaráda Koumy.

„No, víš já už mám teďka hrozně důležitý plány," řekl Ňouma a vzal Koumu kolem ramen.

„Ne, ale vážně klidně běž pomoct Fintě s tou věcí," řekl starostlivě Kouma, „na Indii můžeme jít kdykoliv jindy."

„Ne, žádný matematický problém by neměl být problémem mezi dvěma přáteli" pronesl důležitě Ňouma a oba dva vyprskli smíchy.

Svá řešení uploadujte na našich stránkách:

`https://brkos.math.muni.cz/`

BRKOS Team