BRněnský KOrespondenční Seminář

XXX. ročník
2023/2024

ZADÁNÍ 4. SÉRIE

Nekonečné řady

TERMÍN ODESLÁNÍ: 18. 3. 2024

Text psaný kurzívou není součástí úloh. Pokud odesíláš své první řešení, nezapomeň se prosím před jeho odesláním zaregistrovat na našich webových stránkách.

Součástí 4. série je studijní text, který ti může pomoci při řešení úloh 4.1. – 4.4. Před řešením těchto úloh výrazně doporučujeme si text projít.

Kouma s Ňoumou bloudili skrz Antisvět, Nadsvět, Podsvět, Mezisvět a nakonec konečně dorazili na Slovensko.

„Slovensko na obzoru!“ volal Kouma.

ÚLOHA 4.1: Pomocí teleskopické sumy určete součet řady $\sum_{i=2}^{n} \ln(1 - \frac{1}{i^2})$ pro všechna přirozená n.

„Ukaž!“ vytrhnul mu skládací teleskop z rukou Ňouma. „No fakt jo!“

Slovensko byl absolutně jiný svět než Kouma s Ňoumou znali. První věc, které si všimli, byla, že byl mnohem menší než Svět. Druhá věc, které si všimli, bylo nadměrné množství ovcí pohybujících se po všech místech, i kde by je nečekali. (Nejpřekvapivější bylo pro Ňoumu, když mu jedna ovce zabečela přímo u ucha, když zrovna seděl na toaletě). Třetí věc, které si všimli byla prazvláštní řeč, kterou tu lidé mluvili. Nějakým štěstím stále rozuměli jejich řeči, z nějakého důvodu ale pro ně místní obyvatelé zněli jako by si z nich dělali srandu a ještě ke všemu jim na všechno říkali „naozaj“.

„Milý pane, jak se dostaneme k lidem, co tu vládnou?“ zeptal se Kouma nějakého milého bači u cesty.

„Budete musieť zavolať na našu horúcu linku!“ smeknul před nimi kloboukem.

„Co je jako horúcá linka? To nemáte telefon? Rozumíš? TE-LE-FON??“

„Nie signál. Vyskúšajte tradičné vyvolávanie duší!“ ukázal na zem bača, na podezřelý znak, který Kouma s Ňoumou viděli jen v pochybných okultních zařízeních.

ÚLOHA 4.2: Mějme pravidelný pětiúhelník. Vyznačíme v něm středy všech stran a každý z nich spojíme se středy sousedních stran. Vznikne nám tak menší pětiúhelník a 5 trojúhelníků, které obarvíme černou barvou. Pro menší pětiúhelník proces opakujeme, pouze nově vzniklé trojúhelníky tentokrát obarvíme bílou barvou. Takto pokračujeme a střídavě obarvujeme do nekonečna. Kolik procent z původního pětiúhelníku je obarveno černou barvou?

„Netušil jsem, že když říkal horúcí tak bude hořící!“ poznamenal Ňouma na svíčky rozmístěné ve vrcholech pětiúhelníka.

Symbol se na zemi rozzářil a vytvořil kolem Koumy s Ňoumou velkou kružnici.

„Požiar bezpečnosti, ako vám môžem pomôcť?“ ozval se strojový ženský hlas.

„Um?“ podívali se na sebe Kouma s Ňoumou.

„Ak chcete zavolať ovčí taxík, stlačte jednotku. Ak chcete povedať vtip, stlačte dvojku. Ak chcete, aby vás vypočula vláda, stlačte reálne číslo x, napríklad . . . “

BRKOS Team

ÚLOHA 4.3: Nalezněte reálné číslo x takové, aby platila rovnice

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^{n-\sum_{m=0}^{\infty} x^{3m}} = 2$$

„Dvojku!!“ vyhrkne Ňouma a Kouma po něm vrhne vražedný pohled.

„Ide reštaurácia do nekomutatívneho algebraika“

Ňouma se zamračí a dupne si. „To je jako všechno? To je nějaký rozbitý.“

„Tak tam zadej to reálné číslo x.“

Plameny okolo symbolu nakresleného na zemi se zavlnily a změnily barvu na rumělkově zelenou.

„Zadajte heslo, pre ktoré platí nasledovné … “ ozvala se mechanická paní.

ÚLOHA 4.4: Nechť m je přirozené číslo. Určete, jakých kladných hodnot může nabývat q_m, aby výraz konvergoval. Dokažte.

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{1}{1} \left(\sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\sum_{n_3=0}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\quad \cdots \quad \left(\sum_{n_m=0}^{\infty} \frac{1}{m} q_m^{n_m} \right)^{n_m - 1} \quad \cdots \quad \right)^{n_3} \right)^{n_2} \right)^{n_1}$$

„Víš, co je třeba dobré heslo? Heslo. Nebo 1234, to používáme u nás doma na wifi, nebo třeba by heslo mohlo být ho...“ postěžoval si Kouma.

„Rozumím, rozumím, neboj“ zachlámal se Ňouma,

Uprostřed nakresleného útvaru pro vyvolávání ďáblů se zhmotní majestátně vypadající čáp.

„Eh, pardon?“ podiví se Kouma.

„Hovoríte s kanceláriou prezidentky Susan Kaputové“ oznámí nepříjemný kovový hlas.

„Dobrý den, paní prezidentko,“ ukloní se Kouma s Ňoumou. Čáp si prohrábne své peří a zkoumavýma očima se na dvojici podívá. Kouma začne vyprávět prezidentce Kaputové jejich cestu do jejího kraje. Prezidentka Kaputová seděla u kulatého stolu a brutálně se u Koumova vyprávění nudila. Tak vzala pero (které ji na její Vánoce daroval její dávný přítel ze Světa bývalý prezident Václav Santa Klus).

ÚLOHA 4.A: Jak se prezidentka Kaputová nudila, začala si na svůj kulatý pracovní stůl čmárat. Potom přišel Ňouma a sedl si k jejímu kulatému stolu a všiml si, že z jejich pohledů vypadá obrázek úplně stejně. Jaké obrázky mohla prezidentka Kaputová nakreslit, pokud víme, že by z jejich pohledů obrázek vypadal stejně, ať už by si Ňouma sedl na libovolné místo u stolu? Svoji odpověď dokažte.

„Prosím, paní prezidento, poraďte nám, jak máme přemoct zlého černokněžníka Šim Šal Abíma?“ přerušil Ňouma Koumovo zdlouhavé vyprávění, které svou nudností předčilo i novoroční projev prezidenta Světa Miloše Zemljaka. Vyřčené jméno poprvé upoutalo čápovu pozornost.

„Ve městě jménem Cauchyce vyhledejte čaroděje jménem Jara Švrkošíka, ten vám poradí, co máte dělat,“ řekla prezidenta Kaputová a vypnula hovor. Symbol na zemi přestal hořet a celý prostor voněl jak kancelář ředitele Brkosovic.

BRKOS Team

„No to bylo dost, že vůbec zavřela ten svůj zobák," pousmál se Ňouma.

Naši dva hrdinové našli nejbližší stanicu, nasedli na vláček Strelená strela a započali velmi pomalou hrbolatou cestu na druhý konec Slovenska. Ňouma v okamžiku zavřel oka a usnul tvrdým spánkem, tak rychle, jak to umí jen jeden nejmenovaný organizátor. Za okny začalo sněžit a Kouma pozoroval padající šestiúhelníkové vločky.

ÚLOHA 4.B: Určete délku kolmého průmětu pravidelného šestiúhelníku otočeného o úhel α na vodorovnou osu. Úhel $0°$ znamená, že jedna ze stran je rovnoběžná s vodorovnou osou.

Když konečně celý rozlámaní vystoupili ze Strelene strely (nutno podotknout, že se jim kvůli špatnému stavu vlaku nepodařilo otevřít dveře vlaku ve stanici, ale až o chvíli později, tak museli vyskakovat z vlaku za jízdy, ke štěstí obou hrdinů byla ale špatná kvalita i kolejí, a tak vlaky mohly jezdit maximální rychlostí 10 km/h a nikomu z nich se nic nestalo), ocitli se v malé vesnici jménem Cauchyce. Domy tam nebyly označeny čísly v nějakém pořadí, jak by člověk očekával v každé smysluplné vesnici.

ÚLOHA 4.C: Uvažujme množinu M obsahující $2n+1$ různých čísel pro nějaké pevně dané n. Označme $S(M)$ množinu všech součtů všech prvků všech podmožin množiny M. Za předpokladu, že množina $S(M)$ má právě $2^{2n}-1$ prvků dokažte, že existují tři různé podmnožiny $A, B, C \subseteq M$ takové, že $\sum_{a\in A} a = \sum_{b\in B} b = \sum_{c\in C} c$.

Po dlouhém hledání našli dům se správným číslem (dům je velice přehnané označení, příhodnější by bylo možná chýše, nebo po lidovsku chajda, sbitá dohromady z náhodných prken, držící po spolu silou volů, kteří stáli podél stěn a opírali se o ni, aby se nerozpadla), tak zaťukali.

„Poďte ďalej," ozve se zevnitř stařičký hlas.

Kouma s Ňoumou vstoupí dovnitř a uvidí Jara Švrkošíka, jak sedí za stolem a hraje nějakou prapodivnou hru.

ÚLOHA 4.D: Jaro Švrkošík má před sebou čtvercovou síť 7×7 a chce na ni připravit hru dle klasických pravidel Hledání min. Jeho cílem ale je, aby součet čísel v prázdných polích zobrazující počet sousedních polí obsahujících minu byl maximální možný. Ještě zdůrazňujeme, že na polích s minou žádné číslo není. Určete tento součet a také počet různých řešení s tímto součtem.

„Pane, potřebovali bychom vaši pomoc."

„Ale čo by ste chceli? Čo by ste chceli od starého muža?" řekne Jaro Švrkošík, aniž by se na ně podíval.

„Chceme porazit Šim Šal Abíma."

Jeho ruka zamrzne nad jedním čtverečkem na stole. Pomalu obrátí oči na dvojici stojící před ním. S velkolepou hudbou v pozadí vytáhne z tajné skrýše obrovské kružítko na tabuli.

„Kedy vyrazíme?"

Svá řešení uploadujte na našich stránkách:
https://brkos.math.muni.cz/

BRKOS Team