BRněnský KOrespondenční Seminář

XXX. ročník
2023/2024

ZADÁNÍ 3. SÉRIE

Teorie grafů

TERMÍN ODESLÁNÍ: 29. 1. 2024

Text psaný kurzívou není součástí úloh. Pokud odesíláš své první řešení, nezapomeň se prosím před jeho odesláním zaregistrovat na našich webových stránkách.

Součástí 3. série je studijní text, který ti může pomoci při řešení úloh 3.1. – 3.4. Před řešením těchto úloh výrazně doporučujeme si text projít.

„Váš hrdinský skutek zůstane bez povšimnutí," usmál se pan Říďa, ředitel Matematické školy důkazů a výpočtů v Brkosovicích. Oba hochy propustil mávnutím ruky a vrátil se k rozečtenému astrofyzikálnímu sborníku Hrom!, jejich nepodstatnými záležitostmi ho totiž vyrušili zrovna uprostřed rubriky Hvězdy a jejich osudy, kde se odvíjel napínavý příběh hvězdy Taylor Shift (podle které se samozřejmě jmenuje Taylorův polynom) a jejím zapřičeněním rozpadu hvězdy 1D (jedna z hvězd v konjugátu chvíli obíhala kolem Taylor Shift, postupně se ale od této trasy odklonila a nakonec se vydala na sólovou oběžnou dráhu). Podrobnější výzkumy hvězdy Taylor Shift dovedly vědce i k objevení jejích exoplanetek, mezi nimiž například Tom Riddle-me-this-ton, jedna exoplanetka z trojice Joe Brotha', Harry's Kelvin nebo zvlčelá planeta sdílející jméno původní hvězdy -Taylor Jacob.

Úloha 3.1. Nechť G je souvislý graf s 2023 vrcholy. Víme, že má alespoň jeden bod artikulace a každý vrchol kromě tohoto bodu má stupeň 2. Určete maximální počet hran grafu G.

Před ředitelnou čekala na dvojici odvážných hochů Finťa, se starostlivým výrazem v obličeji. „Co teda budete dělat?"

„No, půjdeme se utkat se záporáky!" odvětil s enthusiasmem Kouma a šťouchnul svého k smrti bledého kamaráda.

„Jste tak stateční. Šťastnou cestu!" popřála jim Finťa a radostným krokem odskákala pryč.

Ňouma se vzchopil na úšklebek. „Jako by byla ráda, že se nás zbaví, nemyslíš?"

„Abychom se raději vydali na cestu."

Ňouma vytáhl z kapsy provizorní mapu cesty pana Řídi, spěšně načrtnotou růžovou fixou na ubrousek od oběda.

„Mám pocit, že říkal abychom se vydali skrz tady ty dva Vrcholy Konstantních funkcí, přes řeku Derivovaných duších, kolem nemocnice l'Hospital, přes most Nesplněných podmínek a pak kolem...," polknul vyděšeně Ňouma.

Úloha 3.2. Rozhodněte a dokažte, zda existuje souvislý graf G, který obsahuje:

a) právě dva body artikulace, právě tři mosty a právě jednu kružnici,

b) právě tři body artikulace, právě dva mosty a právě jednu kružnici.

A tak se naši dva hrdinové vydali na cestu. Těžko říci, jestli by byli rádi, že je nazýváme hrdiny, obecně by ale vůbec nebyli nadšení, kdyby zjistili, že si o nich vyprávíme. Považujme proto předchozí polemiku za nepodstatnou a smluvme, že jim o tom nikdy neřekneme. Naši hrdinové šli takříkajíc dnem i nocí, aniž by spočinuli. Cesta byla sice náročná, naštěstí ale

Ňouma zabalil na cestu spoustu jídla, a tak plnil jejich žaludky výbornými sendviči. Kouma zase plnil jejich myšlenky záludnými úlohami.

Úloha 3.3. Rozhodněte, zda existuje 4-souvislý graf G, jehož hranové chromatické číslo je 3.

Dorazili takhle k vesnici České Brkosovice. Toto místo nebylo vlastně ani natolik malé, aby bylo nazýváno vesnicí, protože ale Kouma s Ňoumou vyrůstali v městě zvaném Brnko, museli pak o všech menších městech tvrdit, že jsou to vesnice.

„Tady mapa říká, že tu bude nějaký háček," konstatoval Ňouma a v tu ránu se z nebe sneslo stvoření, skutečně děsuplné. Hlava byla jednoznačně lví, prozrazovala ji velká bohatá hříva a ostré tesáky. Tělo bylo (podle Koumy, který v biologii vždy exceloval) také lví, spodek těla ale lidský (podle Ňoumy ženský, ten v biologii sice nikdy neexceloval, vždy se ale vyznal ve tvaru ženských lýtek).

Kouma strachy vykulil oči, Ňouma na druhou stranu ale vyprsknul smíchy. „To má být jako Sfinga, jo?"

Kouma se taky pokusil zlehčit situaci. „Spíš Ngasfi!"

„To byl ten nejhloupější vtip, který jsem kdy slyšela", zařvala lví hlava a všechna slova se Koumovi a Ňoumovi přeložila v titulkách. Oba dva se spěšně přestali smát a vyslechli si pravidla Sfingy. Museli odpovědět na záludnou otázku, jinak by jim Sfinga utrhla hlavy, shodila je ze srázu do moře (místního rybníčku) atd. atd.

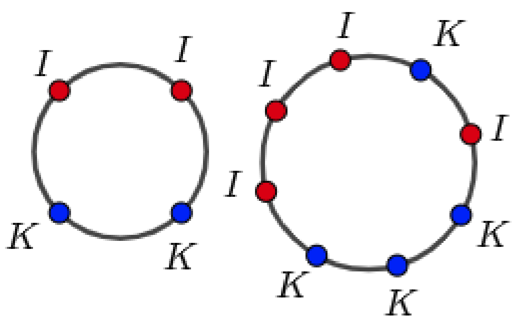
„Kolem ohně stojí indiáni a kovbojové, necht indián = 1, kovboj = 0, a opékají maršmelouny..."

„Jsou ty maršmelouny podstatné?"

„Ticho! Jak jsem říkala, stojí kolem ohně a opékají maršmelouny..."

Úloha 3.4. Kolem ohně stojí dokola indiání a kovbojové. Dokažte, že pro každé $k \geq 1$ existuje posloupnost 2^{k-1} kovbojů a 2^{k-1} indiánů, tedy celkem posloupnost délky 2^k tak, že v ní žádné dvě k-tice po sobě jdoucích postav nejsou stejné. Protože stojí v kruhu, samozřejmě první a poslední člen posloupnosti spolu sousedí. Na obrázku vidíme řešení pro $k = 2$ a $k = 3$. Například na druhém obrázku máme postupně k-tice: $III, IIK, IKI, KIK, IKK, KKK, KKI, KII$. Což jsou všechny možné různé trojice složené z kovbojů a indiánů.

(Nápověda: Zkuste na řešení použít Eulerovský tah vhodným grafem, který bude reprezentovat náš problém)



BRKOS Team

Ke Koumovu překvapení provedl celý korektní důkaz Ňouma. „No, vidíš, že ti konečně ty moje matematické rozcvičky k něčemu byly!“ Ňouma po něm střelil pohledem, který by osobní titulky Sfingy přeložily jako „radši mlč“.

České Brkosovice ležely na samém okraji Světa. Lidé tomu tehdy začali říkat Svět, protože nic většího neznali. Následně se ale ukázalo, že existuje ještě Antisvět, Nadsvět, Podsvět, Mezisvět a Slovensko. Objevování širšího světa bylo v dávných dobách téměř nemožné, protože všech šest zemí bylo propojených pouze temnotou, územím nikoho, takzvanou Ničotou^{tm}.

ÚLOHA 3.A. Mějme tabulku 3×9 tvořenou čtverci, kde prostřední 3 čtverce 2. řádku jsou pohlcena *Ničotou*^{tm} (neexistují). Určete a dokažte, kolika způsoby můžeme vyplnit všechna zbývající pole tabulky, jestliže máme k dispozici 1 tetromino 1×4 a libovolný počet ostatních tetromin. Tetromina můžeme libovolně otáčet i zrcadlově převracet.

„No dobře, a co budeme dělat teď?“ zeptal se logicky Kouma. Oba dva jenom zírali na svíjející se temntou.

„No, tak třeba je tu někde nějakej most,“ řekl Ňouma.

Propast šlehala pásky temnoty, ze kterých se zhmotnila postava v dlouhé černé kutně. Kouma s Ňoumou se na sebe zoufale podívali a zeptali se postavy na jméno.

„Jsem převozník,“ zašeptala postava, ale její hlas zněl jako dusot kopyt, „jmenuji se Gavriel García José Arcadio Aureliano Remedios de la Buendía a jsem převozník.“

„Nebyl Gavriel García José Arcadio Aureliano Remedios nějakej spisovatel?“ špitnul Ňouma.

„Ne, ty hlupáku! To byl Kryštof Globusus. Tohle je Gavriel García José Arcadio Aureliano Remedios de la Buendía, objevitel, první překročitel Ničoty^{tm}.“

„Líbíte se mi, pánové. Navíc už jste splnili první z mých tří úloh, a to vyslovit správně moje jméno. Splníte-li další dvě úlohy, dostanu vás přes Ničotu^{tm},“ zahřměl Gavriel García José Arcadio Aureliano Remedios de la Buendía.

„Nějakej most tu náhodou není, co?“ vyzkoušel Ňouma.

„Ne,“ zakoulel očima převozník, Gavriel García José Arcadio Aureliano Remedios de la Buendía, „k překonání budete potřebovat plavidlo. Ale ne jen tak ledajaké plavidlo!“

„Samozřejmě, že ne jen tak ledajaké plavidlo!“ vzdychnul Kouma, který už začínal mít dost všech čarodějných teatrálních výstupů. Gavriel García José Arcadio Aureliano Remedios de la Buendía ale po něm jenom střelil pohledem a pokračoval. „Vaším plavidlem bude konvexní mnohoúhelník!“

ÚLOHA 3.B. Určete, pro které konvexní mnohoúhelníky ש platí, že existuje kružnice k jim vepsaná taková, že se dotýká ש právě ve středech všech stran.

Výroba konvexního mnohoúhelníku byla i na Ňoumovu velkou fantazii trochu moc, neřekl ale ani slovo, aby převozníka s nevyslovitelným jménem nenaštval ještě víc. Druhou úlohu splnili rychle a hladce. Stáli tedy před třetím úkolem, nejtěžším, podle slov převozníka s nevyslovitelný jménem.

Převozník Gavriel García José Arcadio Aureliano Remedios de la Buendía máchnul rukou a v ní se mu objevil zdobený nůž.

„Ňoumo,“ vyslovil opatrně a podal mu zdobený nůž. Ten byl v Ňoumových rukách těžký, ne ale hmotností, Ňoumovu ruku trápila tíha všech činů tohoto zdobeného nože. S opatrností otočil nůž na druhou stranou a přečetl nápis: „Co jako jedno spojeno jest, vedví rozpůlím zas“.

Ňouma leknutím nůž opustil. Pohlédl prvně na svého nejmilějšího kamaráda a pak tázavým pohledem zpátky na převozníka. Převozník se zastřenýma očima přikývl. „Vy jste vyvolený,“

zadunělo nad propastí.

Ňouma roztřesenou rukou zvedl nůž ze země a očisitl čepel od hlíny. „Koumo, víš..."

V Koumových očích se třpitily slzy. Pochopil. „Ňoumo," vydechl.

To už i v Ňoumových očích se zračily slzy. Věděl, co se musí stát a Kouma, ach Kouma, to musel vědět taky.

„Prosím, odpusť mi to!"

Kouma zavřel oči a natáhl před sebe ruku se svou oblíbenou kostkou.

ÚLOHA 3.C. Ňouma si vzal krychli a nůž. Krychli rozřízl na dvě části rovinným řezem. Poté spočítal počet vrcholů obou částí, které mu vznikly, a tato čísla sečetl. Jaké největší číslo takto mohl získat? Dokažte, že je největší.

Kouma upřeně hypnotizoval dvě části krychle, které teď ležely na jeho dlaních. Už nikdy to nebude jako předtím, byly jako jedno a teď jsou od sebe navždy oddělené. Převozník, věda vážnosti situace jim jen mlčky pomohl nastoupit na provizorní mnohoúhelníkové plavidlo.

„Co jsi musel zaplatit ty, aby ses dostal přes Ničotu^{tm}," přerušil jako první ticho Kouma. Gavriel García José Arcadio Aureliano Remedios de la Buendía se zahleděl na neklidnou hladinu temnoty. „Tu nejvyšší cenu."

Nikdo pak už neměl náladu na povídání. Na druhé straně propasti je převozník Gavriel García José Arcadio Aureliano Remedios de la Buendía vysadil. Ňouma mu poděkoval a nabídl mu nějaký sendvič s tuňákovou omáčkou, aby mu tak ukrutně nekručelo v břiše.

„Chcete úlohu na cestu?" zeptal se jich převozník Gavriel García José Arcadio Aureliano Remedios de la Buendía s plnou pusou sendviče.

Koumu to, zdálo se, trochu povzbudilo a přikývl.

ÚLOHA 3.D. Nalezněte všechny spojité funkce $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ s vlastností $f\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{f(a)}+\frac{1}{f(b)}$ pro všechna nenulová reálná a, b. Nápověda: Nepracujte s definicí spojité funkce. Použijte následující pojmy:

- Hustá podmnožina reálných čísel $H \subset \mathbb{R}$ má tu vlastnost, že pro libovolné reálné číslo $a \in \mathbb{R}$ existuje číslo z husté podmnožiny $b \in H$ libovolně blízko k a (přesněji pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ a $\epsilon > 0$ existuje $b \in H$ tak, že $|a-b| < \epsilon$). Příklad husté podmnožiny v $\mathbb{R}$ jsou například racionální čísla $\mathbb{Q}$, jelikož pro libovolné reálné číslo můžeme sestrojit posloupnost racionálních čísel, která se k němu přibližují libovolně blízko. Další příklad husté podmnožiny v $\mathbb{R}$ jsou tzv. dyadická racionální čísla. Jsou to racionální čísla, která se dají zapsat ve tvaru $\frac{a}{2^m}$ pro $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}_0$. Ve svých řešeních nemusíte dokazovat, že tyto množiny jsou husté v $\mathbb{R}$.

- Máme-li zadané funkční hodnoty na husté podmnožině v $\mathbb{R}$, pak existuje nejvýše jedna spojitá funkce jimi procházející. Hodnoty na husté podmnožině tedy jednoznačně zadávají spojitou funkci. Jinak řečeno, pro spojité funkce platí, že konverguje-li posloupnost bodů na reálné ose k x, pak konverguje posloupnost obrazů k $f(x)$.

„Sbohem kluci."

„Sbohem Gavrieli García José Arcadio Aureliano Remedios de la Buendía."

„Já vím, že tě ta kostka mrzí," omlouval se Ňouma a uvěznil svého kamaráda v těsném objetí.

BRKOS Team

„Té kostky je škoda,“ řekl Kouma a ujistil se, že obě části kostky jsou stále v jeho kapse, „dohromady ji už asi nedám. Myslím, že tu kostku jsi rozříznul na dva, ale my držíme ještě víc pospolu. “

Svá řešení uploadujte na našich stránkách:
`https://brkos.math.muni.cz/`

BRKOS Team