BRněnský KOrespondenční Seminář

XXX. ročník

2023/2024

ZADÁNÍ 2. SÉRIE

Kuželosečky

TERMÍN ODESLÁNÍ: 11. 12. 2023

Text psaný kurzívou není součástí úloh. Pokud odesíláš své první řešení, nezapomeň se prosím před jeho odesláním zaregistrovat na našich webových stránkách.

Součástí 2. série je studijní text, který ti může pomoci při řešení úloh 2.1. – 2.4. Před řešením těchto úloh výrazně doporučujeme si text projít.

„Jaký to krásný, úplně normální den!" protáhnul se Ňouma a mrknul na svého kamaráda.

„Možná tak pro tebe," zamračil se Kouma, „ty nemáš na hlavě obří bouli!"

„Kolikrát jsem se ti už omlouval?" rozezlil se Ňouma, snažíc se nekoukat na Koumovo čelo, které vypadalo jak ovládací stolek k jaderné bombě – s velkým lákavým červeným tlačítkem.

Místo odpovědi Kouma zamručel a obrátil zrak ke svému jídlu.

„Je vedle vás místo?" ozval se nad nimi líbezný hlas.

Ňouma spěšně odhodil všechny věci ze stolu a pustil si sednout Finťu vedle sebe.

„Teda Koumo! Co se ti to stalo?" zeptala se ho starostlivě Finťa.

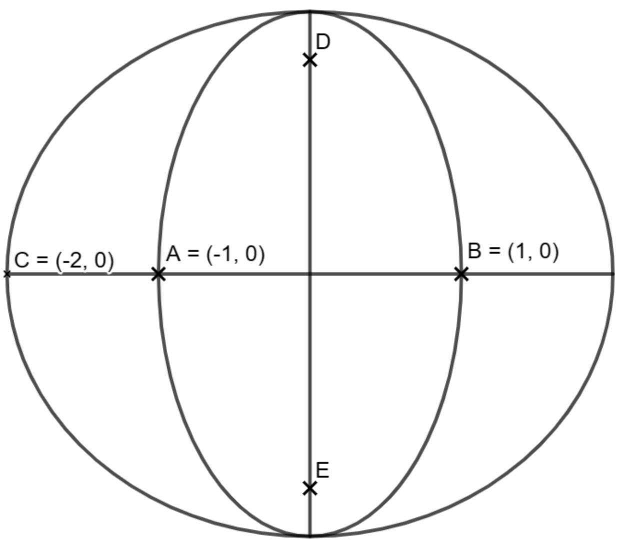
Už se Kouma nadechoval, když v tom ho Ňouma přerušil.

„Kouma včera řešil tak zapeklitý příklad, že mlátil hlavou o zeď. Kdybych ho nevyřešil mlátil by hlavou ještě doteď!“ zalhal Ňouma.

„Jsi mi to ale statečný hrdina, Ňoumíku!“

Ňoumova tvář se zbarvila do červena. Ve chvíli, kdy dojedl poslední kousek své housky z ubrousku, se přímo nad nimi objevilo obrovské hořící oko.

ÚLOHA 2.1. Na obrázku vidíte 2 elipsy. Určete vzdálenost ohniska jedné elipsy od ohniska druhé.



BRKOS Team

„Milí Brkkchrrr studkrchenti kchrrrr,“ rozezněl se celý sál.

„Není ti vůbec rozumět!“ upozornil obrovské zářící oko Fouňa.

„Fak! Tori ále!“ zanadávalo si oko a zmizelo.

O pár minut později se objevilo obrovské zářící oko znovu. „Už mě slyšíte?“

Po souhlasném přimručení se oko vítězoslavně zasmálo.

„Studenti Matematické školy důkazů a výpočtů v Brkosovicích! Jsem kouzelník Šim Šal Abím a přišel jsem vám znemožnit projití letošním semestrem! Od této chvíle nechť π je rovno pěti, nula je přirozené číslo a posloupnosti číslujeme od nuly!“

ÚLOHA 2.2. Mějme trojúhelník EFX. Nalezněte bod A na straně EF, který leží na hyperbole s ohnisky E a F a zároveň na stejné větvi hyperboly leží i bod X. Následně určete vzdálenost $|AE|$ vyjádřenou pomocí délek stran trojúhelníka EFX.

Odpovědí byly kouzelníkovi přidušené výkřiky přítomných studentů.

„My se tě nebojíme, Šimsalabíme!“ postavila se Finťa a namířila na hořící oko svoji bagetu. „Jestli chceš, abychom u zkoušky pohořeli, pohoříš s námi!“

„Ále né!“ ušklíblo se ***hořící*** *oko.*

„My se ti postavíme! My máme totiž tady hrdinu, víš? Ňouma nás ochrání!“ odvrátila se Finťa a ukázala na Ňoumu, odvážně se schovávajícího pod stolem.

Když Ňouma zjistil, že se na něj upírají všechny zraky v sále, donutil svá roztřesená kolena pracovat a postavil se vedle Finti. „Jo, jako!“ zařval a po vzoru Finti namířil na hořící oko svůj toast s vajíčkem.

„Ještě pocítíte můj hněv!“ zahřměl Šim Šal Abím a celým sálem zatřásla obrovská síla. Skleničky popadaly ze stolů, lustry se nebezpečně zakymácely, židle se převrhly a stojící Finťa se zhroutila do Ňoumovy náruče.

Když se všichni ze zemětřesení vzpamatovali, zjistil Ňouma, že mu do náručí spadla Finťa.

ÚLOHA 2.3. Máme kružnice k a l, které mají vnitřní dotyk, l leží uvnitř k. Charakterizujte množinu bodů tvořenou středy kružnic, které mají vnější dotyk s l a vnitřní dotyk s k.

„To bylo víc dotyků, než jsem potřebovala,“ zasmála se nervózně Finťa a osvobodila se z Ňoumova objetí. Pokud se předtím Ňouma červenal, tak teď jeho tvář chytila odstín čínské vlajky. Koumův úsměv se mezitím skřivil do posměšného úšklebku.

„Tak co, pane hrdino?“ zasměje se a pomůže mu vstát. „Co budeme dělat teď?“

„Hele, nech si ty svoje moudra, jo?“

„Jako bych snad za to mohl! To ty si vždycky myslíš, že ti všechno projde. Že se to kolem tebe jenom mihne a vůbec se tě to nedotýká!“

„Má to být velice rafinovaný způsob, jak uvést úlohu na tečny?“

ÚLOHA 2.4. Uvažujte tečnu t k parabole (ohnisko F, vzdálenost ohniska od řídící přímky p) takovou, že prochází bodem S (průnik osy a řídící přímky). Tato tečna protíná parabolu v bodě M. Uvažujte kolmici k k tečně t, procházející bodem M. Tato kolmice k protíná osu paraboly v bodě X. Určete vzdálenost bodu X od ohniska.

BRKOS Team

První záchvěv Šim Šal Abímova hněvu pocítili studenti asi tak o hodinu později, kdy na jinak perfektně fungujícím informačním systému (rozumějte papírovch nástěnkach, neboť Brkosovice jsou z jistých důvodů školou velmi tradiční) se objevily špatné tabulky s výsledky testů.

ÚLOHA 2.A. Najděte všechna n, pro která lze tabulku $n \times n$ vyplnit přirozenými čísly tak, aby v každém čtverci o velikosti 1 až n byl součet těchto čísel roven prvočíslu.

„To snad není možný!“ rval si vlasy Kouma.

„Hele to je vtipný,“ smál se Ňouma a ukázal Koumovi řádky v tabulce, „já tam mám víc bodů než ty!“

„Podívej se, ty ses stal našim Brkosovickým hrdinou, tak taky pracuj, je to tvoje funkce!“

„A co je tvoje funkce?“

ÚLOHA 2.B. Nalezněte všechny rostoucí funkce $f, g : [1,\infty] \to \mathbb{R}$ (tedy funkce vedoucí z intervalu $[1,\infty]$ do množiny reálných čísel), které splňují:

$$x \cdot e^{f(x)} = e \cdot g^2(x)$$
$$f(f(x)) = f(ln(e \cdot g(x)))$$

„Já bych mohl být třeba...“ zamyslel se Kouma.

„Hele radši nepřemýšlej!“

Chaos před informační nástěnkou zničehonic přerušil náhlý jekot. Kouma s Ňoumou si vyměnili zděšené pohledy a rozběhli se za zdrojem křiku. Proběhli několikero schodišť, míjeli učebny než se dostali k dámským toaletám.

„Um, haló?“ zavolal z venku Kouma.

„POMOOOC!“ ozvalo se jako odpověď zevnitř.

„Můžeme dovnitř?“ zeptal se Ňouma.

„Prosím! Rychle!“

„A můžeme? Není tam nikdo...?“ zeptal se pro jistotu Kouma.

„Ale pojďte už sakryš dovnitř!“

Kouma s Ňoumou opatrně se zakrytýma očima vešli dovnitř. Postupně se odvážili a rozhlédli se po místnosti. Dámské toalety vypadaly úplně jinak, než očekávali. Toaleta tam byla jenom jedna, vůbec to tam nevonělo po kytičkách a navíc došly utěrky na ruce. Uprostřed na zemi seděla roztřesená druhačka.

„Bylo to tam viděla jsem to!“ klepala se ještě pořád.

Kouma s Ňoumou opatrně nahlédnuli směrem, kterým ukazovala.

„Co tam bylo?“

„Normovaný kvadratický polynom s koeficienty v $\mathbb{Z}$, jehož každá nenulová hodnota v celém čísle je součinem n prvočísel!“

„Takový normovaný kvadratický polynom s koeficienty v $\mathbb{Z}$, jehož kakždá nenulová hodnota v celém čísle je součinem n prvočísel neexistuje!“

„A co když tu je?“

ÚLOHA 2.C. Dokažte, že neexistuje normovaný kvadratický polynom s koeficienty v $\mathbb{Z}$, jehož každá nenulová hodnota v celém čísle je součinem n prvočísel.

BRKOS Team

Kouma s Ňoumou pomohli dívce vstát a vyměnili si zmatené pohledy. Denní život v Brkosovicích se změní. Jedno je jisté - bude se tam dít něco velice nepřirozeného.

ÚLOHA 2.D. Mějme přirozená čísla a a b, pro která platí $a^3 + a^2 = b^2 + b$.

1. Najděte všechna řešení této rovnice za předpokladu, že a a b jsou nesoudělná čísla.
2. Dokažte, že pro libovolné $d \in \mathbb{N}$ existuje pouze konečně mnoho řešení rovnice, kde d je největší společný dělitel a a b.

Svá řešení uploadujte na našich stránkách:
`https://brkos.math.muni.cz/`

BRKOS Team