BRněnský KOrespondenční Seminář

XXX. ročník

2023/2024

ZADÁNÍ 1. SÉRIE

Důkazový guláš

TERMÍN ODESLÁNÍ: 30. 10. 2023

Text psaný kurzívou není součástí úloh. Pokud odesíláš své první řešení, nezapomeň se prosím před jeho odesláním zaregistrovat na našich webových stránkách `http://brkos.math.muni.cz/`.

Kouma si zívnul a otočil hlavu na svého spolubydlícího. „Ňoumo, vstávej!“

„Mmmm,“ ozvalo se z hromady peřin na vedlejší posteli.

„Vstávat a cvičit!“ dodal energicky Kouma a začal si nasazovat ponožky. „Je čas na rozcvičku!“

ÚLOHA 1.1. Dokažte, že neexistují celá čísla k, l taková, že $2023k + 1785l = 1$.

„Nepamatuju si, že bych s těma tvýma matematickýma rozcvičkama kdy souhlasil!“ postěžoval si Ňouma.

„Mozek se nejlépe cvičí čerstvý!“

„To je ale úplná blbost.“

Kouma s Ňoumou od začátku roku bydleli na kolejích Matematické školy důkazů a výpočtů v Brkosovicích. Ňoumovi totiž někdo během prázdnin řekl, že je, cituji: „Strašnej ňouma“, a tak poprosil svého kamaráda Koumu, zda by si s ním nechtěl doplnit vzdělání. Jak se ale zdá, svého rozhodnutí lituje. Už teď. Kouma se totiž úkolu vzdělat svého kamaráda chytil a neustále ho trýzní všemožnými úkoly, příklady a dotazy.

Na luxusním přiděleném pokoji ale nebydleli sami. V místnosti tvaru půlkruhu spí čtyři – Kouma s Ňoumou, a další dva hoši, se kterými ještě neměli šanci se seznámit.

ÚLOHA 1.2. Mějme půlkružnici k s průměrem A, B. Na této půlkružnici leží dva další body C a D. Všechny body A, B, C, D jsou navzájem různé. Nyní nechť E je průsečík přímek AC a BD. Dokažte, že kolmice na AB, procházející bodem E a přímky BC a AD se všechny protínají v jednom bodě.

Trvalo to ještě tak dvacet minut, než se Ňouma vyhrabal z postele. Rychle se převlékli do svých uniforem (tvořených nevkusnými béžovými kalhotami a šedým svetrem) a pospíchali do Malé síňky. Ostatní školy v Brkosovicích se obvykle scházeli ve svých Velkých síních, nicméně Matematická škola důkazů a výpočtů si pro nevalné množství studentů vystačila s Malou síňkou velikosti obývacího pokoje. Kouma s Ňoumou se posadili na nepohodlná sedátka vedle Fouňi. Ten se zatvářil velice důležitě a řekl jim něco velice nehezkého.

„Potřebuješ si snad něco dokazovat?“ odpálkoval ho Ňouma.

„Ano,“ odvětil bez mrknutí Fouňa.

ÚLOHA 1.3. Uvažujme

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} k^3$$

Víte, že $f(n)$ je polynom 4. stupně. Nalezněte $f(n)$ a indukcí dokažte, že pro váš polynom tvrzení platí pro všechna přirozená n.

Kouma s Ňoumou se zvedli, aby si odsedli. Místa už byla skoro zabraná. Z předních lavic na ně ale mrkala modrooká Fiňa. Fiňa byla jeden z mála důvodů, proč Ňouma studium ještě nevzdal. Kolektiv tu byl velice komplikovaný. Přes krátkou dobu, co se znali, se tu už vytvořilo obrovské množství vztahů, nenávistí, přátelství i rivality a Ňouma se v těchto sociálních věcech, no, moc nevyznal. Záchranou pro něj byl takzvaný Robertův plánek, na kterém byly zobrazeny všelijaké vztahové relace.

ÚLOHA 1.4. Pro která přirozená k a n existuje souvislý graf o $n \cdot k$ vrcholech, který obsahuje n vrcholů stupně i pro každé přirozené i od 1 do k? Řešte pro lichá k a svoji odpověď dokažte.

Po vydatné snídani se přesunuli na přednášku. Profesor mluvil tak monotónním hlasem, že po patnácti minutách Ňouma usnul a po dvaceti minutách Kouma přestal dávat pozor.

„Ňoumo, nemůžu si půjčit tvůj telefon?“ rýpnul do něj.

„Na co?“

„Chci si pustit písničky, tohle se fakt nedá poslouchat.“

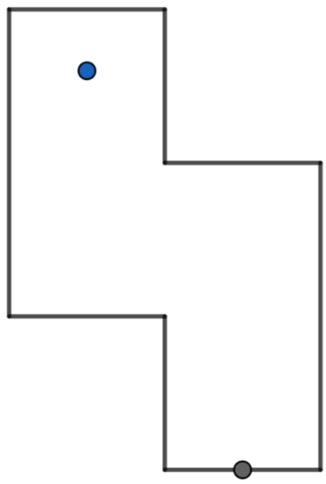
ÚLOHA 1.A. Kouma si chce přehrát náhodně 2 písničky z Ňoumova playlistu. Třetina z písniček v playlistu je od jeho oblíbeného kapely Imagine Numbers. Určete celkový počet písniček v playlistu, pokud víte, že pravděpodobnost, že obě přehrané písničky budou Imagine Numbers, je 1/11.

Ňouma si mezitím vytáhl z batůžku čokoládu a bavil se tím, že ji skládal na sousedovu šachovnici, který pro změnu taky spal.

ÚLOHA 1.B. Které šachovnice $n \times n$ pro n v rozmezí $1 - 10$ jsme schopni beze zbytku vyplnit pomocí kostiček ve tvaru čtverce 2×2 s chybějícím rohem?

Den plný přednášek byl dlouhý, všechny naštěstí byly lepší než ta první, kde se učili o podnikání, což Koumu s Ňoumou absolutně nezajímalo. Večer už zbývala jen poslední hodina, tělocvik. Hned ze začátku roku se Kouma s Ňoumou rozhodli zapsat na ten nejbizarnější tělocvik, co našli. Náhodou to byl zrovna minigolf, na který se přihlásila Fiňa. Nebo to nebyla náhoda?

úloha 1.c. Máme minigolfovou dráhu ve tvaru dvou posunutých shodných obdélníků (viz obrázek). Snažíme se odpálit míček (šedý bod ve středu úsečky) a dostat ho do jamky (modrý bod v ose obdélníku). Ukažte, že lze jamku trefit přímo (tzn. spojit dva body úsečkou ležící uvnitř útvaru), právě když lze jamku trefit pomocí právě dvou odrazů o svislé krajní stěny (tzn. jeden o pravou stěnu a jeden o levou).



Na minigolfu strávili mnohem víc času, než měli. Ňouma se totiž začal předvádět a trefil míček Koumovi přímo mezi oči. Koumovi vyrostla na čele obrovitánská boule a celý večer pak mluvil trochu z cesty.

„Každý chvilku tahá kartu! Neříkej fuj dokud neochutnáš! Nač stahovat mapy, když výlet je ještě daleko!“

Ňouma se cítil velice provinile, a když po dlouhé námaze dostal Koumu konečně do postele, sednul si ke stolu a začal počítat i Koumovy úkoly.

úloha 1.d. Určete poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC se stranami a, b, c a úhly α, β a γ, když víte, že platí:

$$\left(\frac{1}{b}\right)(a + b\sin\gamma) - \frac{b}{a} = \frac{c^2 - 2b^2}{ab}$$

$$a^2 - b^2 + 80 = a(2a + b\sin\gamma)$$

Svá řešení uploadujte na našich stránkách:

`http://brkos.math.muni.cz/`

BRKOS Team