BRněnský KOrespondenční Seminář

XXIX. ročník
2022/2023

ZADÁNÍ 5. SÉRIE

Nekonečné kloktání

TERMÍN ODESLÁNÍ: 24. 4. 2023

Text psaný kurzívou není součástí úloh. Pokud odesíláš své první řešení, nezapomeň se prosím před jeho odesláním zaregistrovat na našich webových stránkách `http://brkos.math.muni.cz/`.

Potrubí je technické zařízení, které je složeno z těsně spojených rour či trubek.

Je obvykle určeno k dopravě kapalin, plynů a různých sypkých materiálů. Potrubím je však možné přepravovat i drobné předměty (například i poštu – potrubní pošta, nebo seno či slámu v zemědělském fukaru apod.).

Poslední dobou se z potrubí začala mimo jiné stávat móda.

ÚLOHA 5.1. Jeden umělec přišel dokonce se soustřednou soustavou potrubí. Začal s jednou trubkou (tzn. válcem) o poloměru průřezu 1, pak do ní vestavěl další o poloměru $\frac{1}{2}$ a se stejným středem, do ní trubku s poloměrem $\frac{1}{3}$ a tak dále. Tímto způsobem vyskládal potrubí s poloměry $\frac{1}{n}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Dokažte, že aby mohl své dílo protnout špejlí tak, aby procházela nekonečně mnoha trubkami, musel by špejli vést společným středem všech trubek.

V minulosti se však potrubí používalo čistě prakticky. Při návrhu tras potrubí bylo obecně potřeba si dávat pozor na přírodní překážky, přes které není možné potrubí vést (chráněné oblasti atd.). Je možné tak dospět k situaci, kdy hledáme polynomem zadanou trasu potrubí, která se vyhne daným přírodním památkám...

ÚLOHA 5.2. Naše mapa je rovina, v nichž máme zadaných n bodů značících přírodní památky. Ukažte, že existuje nekonečně mnoho funkcí tvaru $y = f(x)$, kde $f(x)$ je polynom n-tého stupně, jejichž grafy se vyhnou zadaným bodům.

Díky tomu máme nekonečně mnoho možností, ze kterých můžeme výslednou trasu volit.

Někdy se však může stát, že máme k dispozici jen jeden typ potrubí. V tomto případě pouze rovné trubky, a k nim spojnice na spojení dvou trubek pod libovolným úhlem.

ÚLOHA 5.3. Potrubín, hlavní město v Zemi potrubí, má kruhový tvar. Zaneseme ho do mapy jako kruh K a bodem P na jeho obvodu zaznačíme Potrubní centrálu. Potrubní trasy v tomto městě jsou zaznačeny jako pravidelné n-úhelníky V_n vepsané K pro každé $n \in \mathbb{N}$, a to tak, že jeden z vrcholů V_n je vždy Potrubní centrála, tedy bod P.

Aby měly přístup k potrubnímu systému, musí domy ve městě, opět zaznačeny body v kruhu K, ležet vždy uvnitř nějakého z mnohoúhelníků V_n. Pro které body kruhu K platí, že mohou označovat domy v Potrubíně?

BRKOS Team

Vedle Potrubína se rozkládá velké, do dvou rozměrů nekonečné pole, které je rozčleněné do čtvercových částí stejné velikosti. Chceme dvojice z nich popropojovat trubkami jakožto základ pro zavlažovací systém.

úloha 5.4. Pole si představme jako nekonečnou tabulku, která je neohraničená směrem dolů a doprava. Tudíž každému políčku můžeme přiřadit souřadnice (x, y), kde x a y jsou celá nezáporná čísla $(0, 1, 2, 3...)$.

Nyní všechna políčka spojíme do dvojic, ne nutně různých polí. Tedy můžeme spojit políčko (a, b) s políčkem (a, b). A každé políčko je právě v jedné dvojici. Dále platí, že políčko se souřadnicemi tvaru $(0, a)$ můžu dát do dvojice pouze s políčkem se souřadnicemi tvaru $(b, 0)$. A pokud je ve dvojici políčko (a, b) spolu s (c, d), pak je políčko $(a+c, b+d)$ ve dvojici samo se sebou. Zároveň pokud je nějaké políčko (e, f) spojeno samo se sebou, jsou spolu spojena krajní políčka $(e, 0)$ a $(0, f)$.

Ukažte, že v každém řádku a v každém sloupci existuje právě jedno políčko, které je ve dvojici samo se sebou.

Dále najděte všechna políčka, která mohou ve dvojici sama se sebou.

Už jste si vyzkoušeli, že navrhování systémů potrubí není jen tak. A co teprve když přijde na návrhy trubek samotných!

Potrubí například nemusí mít jen jeden výstup na každé straně, mohou se větvit nebo třeba spojovat.

úloha 5.a. Máme kusy potrubí se dvěma konci, kde každý konec má 1 až n výstupů, kde n je zadané přirozené číslo. Pro každou dvojici (a, b) celých čísel od 1 do n máme právě jeden kus potrubí s a výstupy na jednom konci a b výstupy na druhém.

Jednotlivé kusy potrubí za sebe můžeme připojit jen ve chvíli, kdy mají oba volný konec se stejným počtem výstupů. Jaká mohla být hodnota n, pokud s využitím všech dílků dokážeme vytvořit uzavřený obvod (nebo cestu začínající a končící stejným počtem výstupů)?

Najděte všechna taková n.

Kromě množství výstupů bylo experimentováno i s jejich tvary. V takovém případě ale byly potřeba ještě příčky uvnitř výstupů, aby se nepropadaly dovnitř.

úloha 5.b. Mějme výstup tvaru ostroúhlého trojúhelníku ABC s délkami stran $c > b > a$. Průsečík v_a a osy úhlu ACB označíme X. Průsečík v_a a osy strany c označíme Y. Průsečík osy strany c a osy úhlu ACB označíme S_c.

V takovém případě potřebujeme dvě podpůrné příčky, jedna odpovídá výšce v_a a druhá prochází body Y a S_c.

Určete velikost úhlu mezi nimi, tedy úhlu AYS_c, v závislosti na velikostech úhlů BAC a AXS_c.

BRKOS Team

Flexibilní doba si žádá flexibilní materiály. A kdo bychom byli, kdyby naše potrubí nešlo s dobou. Představujeme vám tedy naši novinku: ohebné potrubí (v podstatě to jsou hadice, ale to už nikdo nemusí vědět, že ;)). K čemu to? Představte si, že máme kruhovou budovu s dutými zdmi, jimiž chceme vést potrubí. Co když chceme spojit dvě místa na obvodu budovy potrubím a náš dodavatel je milovník prvočísel a dodal nám potrubí, jejichž délky dávají po dvou různé zbytky po dělení prvočíslem p? Nezbývá nám, než vyřešit zapeklitou úlohu...

Úloha 5.c. Nechť p je liché prvočíslo. Mějme množinu M obsahující $\frac{(p-1)}{2}+1$ čísel. V této množině mějme číslo, které je násobkem p, a dalších $\frac{(p-1)}{2}$ čísel, které všechny dávají jiné zbytky po dělení p a nejsou dělitelné p. Dokažte, že ať si vezmeme libovolné přirozené číslo n, jsme schopni součtem dvou ne nutně různých čísel z množiny M dostat číslo, které dává po dělení p stejný zbytek jako n.

Nakonec se podíváme na materiály, ze kterých se potrubí vyrábí. Tři z nejčastějších používaných materiálů jsou litina (a), sklo (b) a tombak (c). Jejich mícháním můžeme získat speciální materiály.

Úloha 5.d. Jedním ze vzorců pro míchání je $b^2 = a^2 + c^2 - 2act$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$ jsou reálná množství daných tří surovin a $0 < t < 1$ je parametr určující typ výsledné směsi. Aby nám směs držela pohromadě, potřebujeme, aby platilo $(a+b+c)^2 > 2\pi ac\sqrt{1-t^2}$. Dokažte, že to platí pro všechny typy $0 < t < 1$ a všechna kladná reálná a, b, c.

To je pro dnešek z našeho magazínu o potrubí vše, přejeme vám pevná těsnění a úspěšné dokončení všech vašich (nejen) stavebních projektů!

Svá řešení uploadujte na našich stránkách:
`http://brkos.math.muni.cz/`

BRKOS Team