BRněnský KOrespondenční Seminář

XXIX. ročník

2022/2023

zadání 4. série

Geometrické nerovnosti

termín odeslání: 13. 3. 2023

Text psaný kurzívou není součástí úloh. Pokud odesíláš své první řešení, nezapomeň se prosím před jeho odesláním zaregistrovat na našich webových stránkách `http://brkos.math.muni.cz/`**.**

Součástí 4. série je také krátký studijní text, který ti může pomoci při řešení úloh 4.1. – 4.4.

Ve čtvrté sérii navštívíme obchod se starým nábytkem, konkrétně se specialitami z 18. století. Mají tam opravdu pozoruhodné kousky. Z mechanismů, které používali tehdejší návrháři, by se mohli ti dnešní učit!

Úloha 4.1. Na vstupních dveřích visí trojúhelníková cedule. V jejím vnitřku (ne v žádném z vrcholů ani na hraně) je zatlučený háček. Háček je spojený provázkem se dvěma vrcholy cedule tak, že háček a tyto dva vrcholy tvoří trojúhelník. Dokažte, že obvod tohoto „provázkového" trojúhelníku bude vždy menší než obvod cedule, ať už háček zatlučeme kamkoliv.

Vejdeme dovnitř a jdeme si prohlédnout nabídku nábytku. Na pravé straně místnosti stojí rozkládací stůl s důmyslným mechanismem rozložení a opětovného složení. Stůl má v tuto chvíli tvar trojúhelníku, ale je možné jej rozložit tak, aby jeho okraj tvořil kružnici původnímu trojúhelníku opsanou. Zároveň je možné ho složit tak, že jeho okraj bude tvořit kružnici jemu vepsanou.

Úloha 4.2. Střed kružnice vepsané libovolného trojúhelníku leží uvnitř kružnice opsané. Dokažte toto na první pohled zřejmé tvrzení.

Za stolem stojí mohutná almara s výrazným vzorem na dveřích.

Úloha 4.3. Vzor tvoří tři kružnice, které se protínají v jednom bodě uvnitř trojúhelníku spojujícího jejich středy. Na vybarvení vzoru byly použity tři barvy - jedna pro plochy mimo kružnice, druhá pro plochy uvnitř právě jedné z nich, a třetí pro plochy uvnitř právě dvou z nich, tedy v průniku dvou kružnic. Ukažte, že víc barev potřeba nebylo, tedy že neexistuje bod, který by ležel ve vnitřku všech tří kružnic.

Uprostřed dveří almary, nad již zmíněným vzorem, je schovaný kulatý otvor. Když se do něj podíváte, uvidíte, že se ve skutečnosti jedná o důmyslně skrytý kaleidoskop.

Úloha 4.4. Tento kaleidoskop má kukátko, ve kterém se při každém otočení objeví jiný útvar. Pro každý takový útvar platí, že jeho každé dva body mají od sebe vzdálenost nejvýše 1. Zároveň pokud je nějaký bod vzdálen nejvýše 1 od každého bodu v útvaru, pak je v útvaru také obsažen. Ukažte, že při žádných dvou otočeních neuvidíme stejný útvar; tedy že existuje nekonečně mnoho nepodobných útvarů, které se mohou v kaleidoskopu ukázat.

Další kuriózní položkou v tomto obchodě je nastavitelné prostírání položené na stolku před almarou.

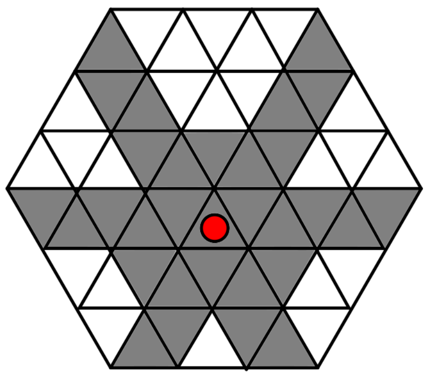
Úloha 4.a. Prostírání má tvar čtverce a je sestavené z menších čtvercových částí, všech stejné velikosti. Dá se mimo jiné přestavět na obdélníkové, které má jednu stranu o 6 dílků delší, než druhou. Kolik dílků má strana původního čtvercového prostírání? Najděte všechna možná řešení.

U stolu je postavená židle s opěradlem pošitým látkou. Starožitník nám prozradil, že její design byl výhodný z toho důvodu, že dříve se látky prodávaly pouze po celých centimetrech čtverečních. Také bylo módní, aby rozměry všech částí nábytku byly celočíselné.

Úloha 4.b. Opěradlo židle je složeno ze čtyř čtverců pošitých látkou. Dokažte, že každé tehdy koupitelné (tedy celočíselné) množství látky jde rozdělit do čtyř čtverců s celočíselnou hranou (jinými slovy dokažte, že každé nezáporné celé číslo umíme napsat jako součet čtyř druhých mocnin celých čísel).
Úloha sama o sobě není snadná, ale pokud využijete skutečnost, že každé nezáporné celé číslo umíme napsat jako součet tří druhých mocnin celých čísel právě tehdy, když nelze rozložit na součin $4^r(8k+7)$ pro žádné přirozené r a k, určitě to zvládnete :).

Součástí setu je i stará logická hra.

Úloha 4.c. Hra má tvar pravidelného šestiúhelníku sestaveného z 54 trojúhelníkových dílků. K hrací desce patří i vyřezávané figurky, které se dají umisťovat na jednotlivé dílky. V pravidlech hry je psáno, že každá z nich 'pokrývá' všechny dílky v řadách, ve kterých stojí, i všechny sousedící alespoň rohem (viz nákres). Z hrací desky v tomto obchodě se časem jeden z dílků ztratil, má jich tedy jen 53. Kolik nejméně figurek byste potřebovali umístit, aby pokryly všechny neztracené dílky? Umístění ztraceného dílku si můžete zvolit sami.



BRKOS Team

Vedle stolku stojí cestovní skříňka se spoustou skrytých přihrádek.

Úloha 4.d. Skříňka je na vrchní straně označená prvočíslem, označme ho p, a skládá se z přihrádek očíslovaných postupně všemi přirozenými čísly k nesoudělnými s p^3 menšími než p^3. V přihrádce s číslem k je tolik předmětů, kolik je nezáporných řešení rovnice

$$kx \equiv x \pmod{p^3}$$

menších než p^3. Určete počet předmětů v celé skříňce.

Poznámka pro řešitele, co nerozumí uvedené rovnici: nezoufejte, jedná se pouze o zjednodušený zápis tvrzení „kx dává stejný zbytek jako x po dělení p^3“.

Když starožitníkovi řekneme výsledný počet předmětů, zaraduje se a poděkuje nám. Dané číslo bylo totiž napsané v návodu ke skříňce, ale sám si nedokázal ověřit, že platí. Za odměnu nám nabídne čaj a zbytek odpoledne nám vypráví příběhy starého nábytku, který nás obklopuje.

Svá řešení uploadujte na našich stránkách:
http://brkos.math.muni.cz/

BRKOS Team