BRněnský KOrespondenční Seminář

XXIX. ročník

2022/2023

ZADÁNÍ 3. SÉRIE

p-VALUHRACE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 30. 1. 2023

Text psaný kurzívou není součástí úloh. Pokud odesíláš své první řešení, nezapomeň se prosím před jeho odesláním zaregistrovat na našich webových stránkách `http://brkos.math.muni.cz/`**.**

Součástí 3. série je také krátký studijní text, který ti může pomoci při řešení úloh 3.1. – 3.4.

Hra je činnost jednoho či více lidí, která nemusí mít konkrétní účel, ale přitom má za cíl radost či relaxaci. Hry se hrají především pro zábavu, ale mohou také sloužit například ke vzdělávání. Rolí hry ve společnosti se zabývá věda zvaná ludologie — v jejím duchu si pár takových her a jejich výherní strategie rozebereme.

ÚLOHA 3.1. Nechť p, q jsou prvočísla. Určete (v závislosti na p a q) nejvyšší mocninu p takovou, že dělí výraz $(p^q + q)(q^p + p)$.

(**PŮVODNÍ ZADÁNÍ:** Klárka hraje hru pro maximálně $(p^q + q)(q^p + p)$ hráčů, kde p, q jsou prvočísla. V prvním kole přizve ke hře $p - 1$ dalších orgů. V každém kole přizve každý ze současných hráčů $(p - 1)$ svých kamarádů. Kolik kol budou hrát (tedy kolikrát mohou takto zvýšit počet hráčů)?)

ÚLOHA 3.2. Tonda rád riskuje, a tak si každý pátek zajde do hazardní herny. V rohu tam stojí automat s tlačítky očíslovanými 0 až $p - 1$, kde p je prvočíslo. V každém herním kole náhodně zobrazí na obrazovce číslo N. Tonda pak vymačká posloupnost $N + 2$ tlačítek (označme ji $k_{-1}, k_0 \ldots, k_N$, kde k_i má hodnotu i-tého zmáčknutého tlačítka), na základě které automat rozhodne, zda vydá výhru. Po uplacení programátora automatu zjistil, že výhru vydá právě tehdy, když

$$v_p\left(\frac{1}{p} + \sum_{n=-1}^{N} k_n \cdot p^n\right) = N + 1.$$

Poraďte mu strategii v závislosti na N.

ÚLOHA 3.3. Prvočíselný počet řešitelů BrKoSu hraje hru, která obsahuje x červených a y žlutých výherních žetonů, kde x, y jsou lichá celá čísla. Celkem je v banku $x^{10} - x^8y^2 - x^2y^8 + y^{10}$ žetonů, hraje se na několik kol. V každém kole jeden z hráčů vyhraje a vezme si k sobě *přesně* $\frac{p-1}{p}$-násobek žetonů aktuálně v banku, p značí počet hráčů. Hra končí ve chvíli, kdy v banku zbude počet žetonů nedělitelný p. Pro každé možné p určete nejmenší počet kol, který hra může mít.

ÚLOHA 3.4. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n$ jsou přirozená. Označme $X = [(a_1, a_2), (a_2, a_3), \ldots, (a_n, a_1)]$, $Y = ([a_1, a_2], [a_2, a_3], \ldots, [a_n, a_1])$; kde $(b_1, \ldots, b_n)$ značí největší společný dělitel a $[b_1, \ldots, b_n]$ nejmenší společný násobek.

BRKOS Team

Martin s Vítkem hrají hru. Martin zvolí číslo n a Vítek pak čísla $a_1, \ldots, a_n$. Martin vyhraje pokud $X|Y$ nebo $Y|X$. Najděte všechna taková n, že když je Martin zvolí, určitě vyhraje bez ohledu na čísla $a_1, \ldots, a_n$ vybraná Vítkem.

Úloha 3.a. Dalibor navrhuje hru. Na herním plánu má 2022 bazénů. Chtěl by mezi nimi nakreslit tobogány tak, že se dá z každého dojet soustavou tobogánů do jakéhokoli jiného. Je ale líný a nechce se mu kreslit více než musí. Kolik nejméně tobogánů musí nakreslit? (Pozn. tobogány jsou jednosměrné.)

Úloha 3.b. Matyáš vymyslel hru s poněkud komplikovaným herním polem, které potřebuje větví vyrýsovat do písku. Má však k dispozici jen poměrně malé volejbalové hřiště, a proto potřebuje určit, zda se mu zamýšlený tvar pole na hřiště vleze. Chce vytvořit dvě kružnice se stejným poloměrem $k(A,r)$, $l(B,r)$ protínající se v bodech X a Y, přičemž velikost $|XY|$ je 27. Následně povede tečnu ke kružnici k procházející bodem X, která zároveň dle jeho požadavku musí procházet bodem B. Poté si zvolí libovolnou přímku p, která prochází bodem X a nejedná se o tečnu ke k ani k l. Označí průsečík k a p různý od X jako K a průsečík l a p různý od X jako L. Jaká je největší možná hodnota $|XK| \cdot |XL|$, kterou výběrem přímky p mohl získat? Své tvrzení dokažte.

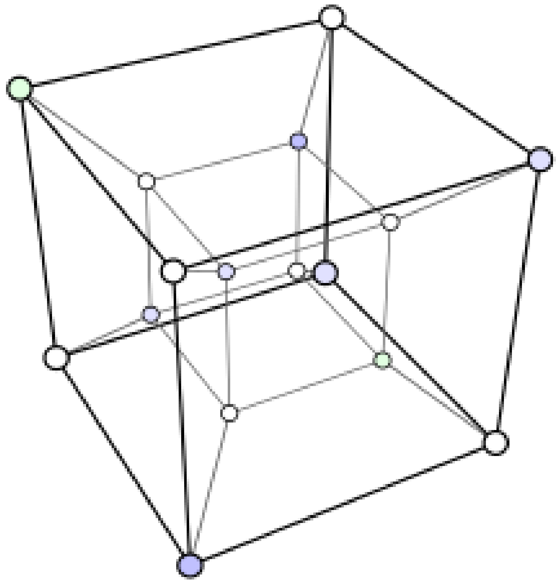
Úloha 3.c. Skupinka malých bobrů si ráda hraje v říční deltě a staví v ní hráze. V deltě se řeka několikrát rozdělí na místech nazývaných větvení. Na prvním větvení se řeka rozdělí na dva menší toky. Každý z těchto toků se po jedné bobří míli (tedy v druhém větvení) rozdělí na tři ještě menší toky. Obecně dále platí, že na lichých větveních se řeka rozděluje na dvě části a na sudých větveních na tři. Na každém rozvětvení má každý z nových toků šanci $\frac{1}{2}$, že na něm bobři postaví hráz a řeku tak zahradí. Jaká je pravděpodobnost, že po sedmé úrovni rozvětvení bude dále pokračovat alespoň jeden tok řeky?

Úloha 3.d. Terka je čtyřdimenzionální dívka, která si hraje s 8 třírozměrnými krychlemi, jejichž stěny obarvila červenou a modrou barvou, přičemž všechny obarvila stejným způsobem (na každou stěnu dala právě jednu barvu a je možné, že nějakou barvu vůbec nepoužila). Krychle pak slepila dohromady stěnami tak, že vytvořila čtyřrozměrnou krychli (teserakt), přičemž vždy slepila pouze stejně obarvené stěny. Kolik možných teseraktů takto mohlo vzniknout?

Intuitivně řečeno, dva teserakty považujeme za stejné, pokud jeden můžeme získat z druhého čtyřrozměrnou „rotací“ nebo „zrcadlením“. Formálně řečeno, dva teserakty A a B považujeme za stejné, pokud existuje zobrazení f z vrcholů teseraktu A do vrcholů teseraktu B takové, že:

- pro každý vrchol b teseraktu B existuje vrchol a teseraktu A takový, že $f(a) = b$.
- mezi vrcholy u a v teseraktu A existuje hrana právě tehdy, když existuje hrana mezi vrcholy $f(u)$ a $f(v)$ teseraktu B.
- pokud vrcholy a, b, c a d v teseraktu A ohraničují stěnu, tak má tato stěna stejnou barvu jako stěna ohraničená vrcholy $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ a $f(d)$ v teseraktu B.

Pro představu, teserakt si můžete představit třeba tak, jako je znázorněn na následujícím obrázku.



PS.: Odvážní mohou u každé hry dvou a více hráčů napsat, komu z hráčů nejvíce věří, že hru vyhraje.

Svá řešení uploadujte na našich stránkách:
`http://brkos.math.muni.cz/`

BRKOS Team