BRněnský KOrespondenční Seminář

XXIX. ročník

2022/2023

ZADÁNÍ 2. SÉRIE

Ščvrčci a hmyz

TERMÍN ODESLÁNÍ: 5. 12. 2022

Text psaný kurzívou není součástí úloh. Pokud odesíláš své první řešení, nezapomeň se prosím před jeho odesláním zaregistrovat na našich webových stránkách `http://brkos.math.muni.cz/`**.**

Součástí 2. série je studijní text, který ti může pomoci při řešení úloh 2.1. – 2.4. Před řešením těchto úloh výrazně doporučujeme si text projít. Pro zápis řešení úloh 2.2. – 2.4 použijte postup pro řešení konstrukčních úloh popsaný v tomto studijním textu.

Hmyz (Insecta) je třída šestinohých živočichů z kmene členovců, kteří mají tělo rozdělené do tří článků (hlava, hruď a zadeček). Pro všechny druhy je charakteristické, že mají tři páry nohou, většinou mají složené oči, tykadla a jsou jedinými členovci, kteří umějí aktivně létat. Jedná se o nejrůznorodější skupinu živočichů na světě, která zahrnuje více než milión popsaných druhů. Nové druhy jsou objevovány převážně v tropických oblastech, ve kterých hmyz dosáhl největší rozmanitosti, ale občas jsou objeveny nové druhy např. i v Evropě.

DRUH 2.1. Ščvrček brkosí (*Gryllus bombycillae*) je středně velký druh cvrčka. Krytky jeho křídel jsou trojúhelníkové s modrou skvrnou. Označme si jeden z těchto trojúhelníků ABC s pravým úhlem u vrcholu C, $|AB| = 2$ a $|AC| = 1$. Bod V je střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC, bod X je průsečík přímek AV a BC. Modrá oblast na krytce je vymezená body C, V, X. Určete velikost úhlu CVX.

DRUH 2.2. KoMáR (*Culex mathum*) je patrně nejznámější druh komára v České republice. Jeho výrazným rysem je trojúhelníková hlava a ještě trojúhelníkovější sosák. Jejich proporce jsou spolu úzce propojené, což si můžeme znázornit následovně: Střed kružnice opsané hlavě-trojúhelníku ABC označme S. Střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC označme V. Střed kružnice připsané trojúhelníku ABC ke straně a označme P_a. Máme fotografii sosáku – známe tedy $|SV|$,$|SP_a|$ a $|P_aV|$. Zkonstruujte hlavu-trojúhelník ABC. Pro zápis řešení použijte postup pro řešení konstrukčních úloh popsaný ve studijním textu k této sérii.

DRUH 2.3. BrNOČní motýl (*Papilio brnocto*) rád létá kolem svítících žárovek, přičemž jeho dráha splňuje velmi přísná pravidla. Dokažte, že pro libovolný trojúhelník ABC tvoří jeho Švrčkovy body S_a, S_b, S_c ostroúhlý trojúhelník. Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li $|S_aS_b|$, $|S_bS_c|$ a $|S_cS_a|$. Pro zápis řešení použijte postup pro řešení konstrukčních úloh popsaný ve studijním textu k této sérii.

DRUH 2.4. Mravkolev Markovův (*Myrmeleon markovii*) je speciální druh mravkolva, který si staví pasti ve tvaru trojúhelníku. Sestrojte půdorys pasti, jestliže znáte její obvod, poloměr kružnice vepsané a poloměr kružnice připsané k jedné ze stran. Pro zápis řešení použijte postup pro řešení konstrukčních úloh popsaný ve studijním textu k této sérii.

BRKOS Team

DRUH 2.A. Mandělinka prvočí (*Leptinoťarsa primoprotozoae*) dospívá sedm let a poté se množí mitózou. Rozdělí se přesně tolikrát, kolik je dělitelů součinu letopočtů těchto let. Dokažte, že se rozdělí alespoň 60 krát (tedy že součin libovolných 7 po sobě jdoucích přirozených čísel má nejméně 60 dělitelů).

DRUH 2.B. Vodoměrky Caratheodoryho (*Hydrometra carathēodori*) žijí v oblastech rozsahu 4×4 políček, kde na každém políčku je buďto ostrůvek, proud dolů (na jih), nebo proud doprava (na východ). Vodoměrka přistává v levém horním rohu a nechává se unášet proudem. Pokud dopluje na ostrov, zůstane tam a nepokračuje dál. Jaká je pravděpodobnost, že v náhodné takové oblasti vodoměrka dopluje až za její hranici? (Náhodná oblast je taková, že na každém políčku je se stejnou pravděpodobností náhodně jeden ze tří povrchů (ostrůvek, proud dolů, nebo doprava), každý s pravděpodobností $\frac{1}{3}$, a povrch jednotlivých políček je navzájem nezávislý.)

DRUH 2.C. Životní cyklus cikád (*Cicadoidea*) trvá prvočíselný počet let dávající zbytek 1 po dělení čtyřmi. Cikáda třídělná (*Magicicada tripartitum*) je navíc známá tím, že její životní cyklus začíná jen v letech n takových, že $n^2 - p$ má alespoň tři prvočíselné dělitele. Dokažte, že takových n je nekonečně mnoho a tyto cikády proto nevyhynou.

DRUH 2.D. Ska$\mathbb{R}$abeus zlatý (*ScaRabaeus aureus*) byl posvátný ve starověkém Egyptě. Na jeho počest nazývali staří Egypťané reálná čísla r ve tvaru $a + b\sqrt{5}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, scarabreálná. Pro $r = a + b\sqrt{5}$ označme $rac(r) = a$, $irac(r) = b$. Označme $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ zlatý řez. Ukažte, že každé číslo tvaru $r = 2\varphi^{2n}$ je scarabreálné a platí $rac(r) = 5F(n)^2 + 2(-1)^n$, $irac(r) = F(2n)$, kde $F(m)$ je m-té Fibonacciho číslo.

Lovu zdar!

Svá řešení uploadujte na našich stránkách:
`https://brkos.math.muni.cz/`

BRKOS Team