BRněnský KOrespondenční Seminář

XXIX. ročník

2022/2023

ZADÁNÍ 1. SÉRIE

Úvodní rozcestník

TERMÍN ODESLÁNÍ: 17. 10. 2022

Text psaný kurzívou není součástí úloh. Pokud odesíláš své první řešení, nezapomeň se prosím před jeho odesláním zaregistrovat na našich webových stránkách `http://brkos.math.muni.cz/`.

Velice nás těší, že jste si pro své letošní cesty zvolili právě naši cestovní agenturu. V průběhu roku se podíváme na nejrůznější matematicky, historicky i hystericky zajímavá místa. Tak si držte klobouky, nažhavte propisky a můžeme vyrazit!

Naši cestu zahájíme u úvodního rozcestníku. Odtud se vydáme například do Paříže, kde si prohlédneme světoznámou výstavu obrazů v paláci Louvre. Vynasnažíme se neztratit na dlouhé cestě do Egypta, po obědě znovuobjevíme Řím a také se stavíme v Londýně, kde navštívíme královskou rodinu. Veškeré potřebné vybavení vám samozřejmě zapůjčíme, včetně rybářských prutů pro plavbu po Středozemním moři a růžových brýlí pro návštěvu britského krále.

Před odjezdem jen ještě potřebujeme zkontrolovat správnou funkčnost motoru našeho rychlobusu. Pomůžete nám?

ÚLOHA 1.1. Máme součástku, která vypadá jako dvě kružnice, označme je k, l, které se protínají v různých bodech X, Y. Uvažme bod A na kružnici k a bod B na kružnici l tak, že A, B jsou různé od X, Y a body A, B a X neleží na jedné přímce. Označme kolmici na AX (resp. BX) v bodě A (resp. B) jako p (resp. q). Dokažte, že průsečík p a q leží na kružnici opsané trojúhelníku ABX.

Rádi bychom také zefektivnili navigační jednotku a začali při výpočtech používat explicitní vzorec.

ÚLOHA 1.2. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ označme:

$$P(n) = \underbrace{1 + 3 + \cdots + (2n-1)}_{n \text{ členů}} + \underbrace{(2n-2) + (2n-3) + (2n-4) + \cdots + n}_{n-1 \text{ členů}}$$

Tedy například $P(1) = 1$, $P(2) = 1 + 3 + 2$, $P(3) = 1 + 3 + 5 + 4 + 3$. Dokažte, že pro každé přirozené n platí, že $P(n)$ dává zbytek 1 po dělení 5, a zapište explicitním vzorcem (předpisem) pro $P(n)$ pouze za pomocí znamének +,-,· a mocnin (bez "trojteček").

Rychlobus jsme zkontrolovali a můžeme vyrazit! Naší první zastávkou je Paříž. Vydáme se do Louvru, kde je mimo jiné vystaven i slavný obraz se spoustou kružnic. Dokážete už teď odhadnout, jak by mohl vypadat?

ÚLOHA 1.3. Obraz (nekonečná rovina) je obarven několika barvami, přičemž platí, že uvážíme-li v tomto obraze libovolnou kružnici, tak tato kružnice neobsahuje všechny použité barvy. Kolik nejméně barev může obraz mít?

BRKOS Team

Další zastávkou je Egypt, a cesta tam je dlouhá a klikatá. Řidič rychlobusu si všiml, že mu připomíná graf jisté polynomiální funkce, a zamyslel se nad ní.

Úloha 1.4. Uvažujme normovaný polynom stupně 2022, který má včetně násobností 2022 kladných reálných kořenů $r_1, \ldots, r_{2022}$ a jehož absolutní člen je 12345678. Určete, jaké nejmenší hodnoty může nabývat součet

$$r_1 + \frac{1}{r_1} + r_2 + \frac{1}{r_2} + \ldots + r_{2022} + \frac{1}{r_{2022}}.$$

Po příjezdu poobědváme se starostou v jednom z menších egyptských měst. Zmínil, že by rád na pyramidy rozmístil solární panely, ale může si vybrat jen jednu ze dvou trojúhelníkových ploch na její stěně. Pomůžete nám ho přesvědčit, že na výběru z pohledu velikosti nezáleží?

Úloha 1.A. Máme libovolný trojúhelník ABC s těžištěm v bodě T. Dokažte, že obsahy trojúhelníků S_aTB a ATS_b jsou u jakéhokoliv takového libovolného trojúhelníku ABC stejné. (S_a je střed strany BC a S_b je střed strany AC.)

Se starostou se loučíme a vyrážíme zpátky do Evropy. Řidič rychlobusu je znavený, a tak raději poplujeme trajektem přes Středozemní moře. Určitě se moc nezdržíme, třeba nám to i prospěje – koneckonců mořský vzduch má velmi pozitivní vliv na zdraví.

Úloha 1.B. Ukažte, že polynom $x^n - nx + n - 1$, kde $n > 0$ je sudé celé číslo, nemá žádné záporné kořeny. Poté najděte všechny kladné reálné kořeny tohoto polynomu.

Předposlední zastávkou naší cesty je Itálie. Uhodnete, do jakého města se vydáváme?

Úloha 1.C. Ve státě je n měst ($n > 0$), přičemž mezi městy vedou jednosměrné silnice. Posloupnost na sebe navazujících silnic (i prázdnou) pak nazveme cesta. Víme, že pokud z města A do města B vede silnice, tak neexistuje žádná cesta z B do A. Navíc víme, že pro libovolná dvě města A, B existuje město C takové, že do C vede cesta z A i B.

Ukažte, že existuje právě jedno město (označme jej Řím) takové, že všechny cesty vedou do Říma. Přesněji řečeno, každá cesta buď nelze prodloužit a končí v Římě, nebo lze prodloužit tak, aby končila v Římě.

Na závěr naší cesty se zastavíme na návštěvu u britského krále. Nejdříve ale musíme najít Vítka, který se nám ztratil na šachovnici před jeho palácem.

Úloha 1.D. Vítek stál na políčku nekonečné šachovnice a vydal se na procházku po ní. V každém kroku se posunul o jedno pole jedním ze 4 základních směrů: nahoru, doleva, dolů nebo doprava. Kolik různých procházek mohl Vítek po šachovnici udělat, pokud víme, že udělal 26 kroků a skončil na stejném políčku, jako začal?

Doufáme, že se vám dnešní výlet po Evropě (a kousíčku severní Afriky) líbil. Budeme se těšit u příští expedice. Naberte síly a za měsíc zase na viděnou! :)

Svá řešení uploadujte na našich stránkách:
`http://brkos.math.muni.cz/`

BRKOS Team