BRněnský KOrespondenční Seminář

XXVIII. ročník

2021/2022

Zadání 5. série

NEROVNOSTI

Termín odeslání: 25. 4. 2022

Součástí 5. série je krátký studijní text, který ti může pomoci při řešení úloh 5.1. – 5.4.
Text psaný kurzívou není součástí úloh.

Vážení a milí matematičtí, kuchařští a jiní nadšenci,

vítejte u posledního dílu naší velkolepé kulinářské show plné matematiky, výzev a náhodných zajímavých faktů. Ač je to smutné, náš kulinářský pořad se pomalu, ale jistě chýlí ke konci. Protože vaše snažení bylo úchvatné, enormní až fascinující, je třeba na závěr uspořádat oslavu. A jakápak by to byla oslava bez dortu! (A co teprve bez brkosích příkladů!)

Nejdříve si vezměte dostatečně slavnostní oblečení, abyste na oslavě neudělali ostudu. Doporučujeme třeba princeznovské šaty, hasičskou uniformu či vaše nejlepší pyžamo.

Jakmile budete vhodně oděni, můžete se pustit do přípravy dortu. Nejdříve si rozpustíme máslo a dokážeme, že pro všechna reálná čísla a, b, c *platí* $f(a, b) \leq f(a, c) + f(b, c)$.

ÚLOHA 5.1. Mějme funkci $f(a, b) = |a^2 - b^2|$. Dokažte, že pro všechna reálná čísla a, b, c platí $f(a, b) \leq f(a, c) + f(b, c)$.

Ve středověku se mimochodem slovo dort kdysi rovnalo natvrdo upečené placce chleba (takže v případě neúspěchu můžete váš dort nazývat pedagogickou pomůckou pro studenty historie a autentickou ukázkou toho, jak se žilo v dávných dobách).

K rozpuštěnému máslu přidejte cukr, mouku, pár prvočísel na dochucení, kypřicí prášek, několik vajec a nerovností – jako třeba tuhle:

ÚLOHA 5.2. Pro $a, b, x, y \in \mathbb{R}^+, x > y$, dokažte následující nerovnost:

$$\frac{(a^2 + b^2)x + (-a^2 + b^2)y}{x^2 - y^2} \geq \frac{(a + b)^2}{2x}.$$

Nastal čas na první náhodné fakty tohoto dílu našeho pořadu. Nejdříve se zlehka podíváme do historie. Sladkou variantu pečiva si lidé připravovali už ve starověku, do těsta přidávali sušené ovoce, či chlebové placky při jídle namáčeli do medu. Dorty na způsob dnes módních cheesecaků se připravovaly s medem a tvarohem už za časů antického Řecka.

Ve starověké Americe nebyl dort něčím, co by lidé rádi jedli. Věřili totiž, že když si necháte ovocný dort pod polštářem, budete mít hezkého manžela. Jestli to je pravda, s jistotou nevíme. Dokázat to samozřejmě není jednoduché. Oproti tomu dokázat, že níže definovaný polynom P *má jediný trojnásobný kořen, by měla být hračka.*

ÚLOHA 5.3. Představme si normovaný polynom $P(x)$ stupně 3, který má včetně násobností 3 reálné kořeny a, b, c. Pro P navíc platí, že koeficient u x je roven $a^2 + b^2 + c^2$. Dokažte, že P má jediný trojnásobný kořen.

BRKOS Team

Po tom, co veškeré ingredience vyšleháme do kompaktní směsi, nalijeme těsto do formy a dáme péct. Samozřejmě, že většina z nás je zvyklá na kulaté dorty, ale v naší kulinářské show se podíváme na to, jak připravit o něco netradičnější pochoutku. Ruku na srdce, umíte si představit hezčí půdorys dortu, než je tětivový čtyřúhelník?

Úloha 5.4. Uvažujme tětivový čtyřúhelník se stranami a, b, c, d a úhlopříčkami e, f. Ukažte následující nerovnost: $e^2 + f^2 \geq 4\sqrt{abcd}$. Určete, kdy nastane rovnost.

Jakmile dort vyndáte z trouby, nechte ho vychladnout. Zatímco bude dort odpočívat, spočítejte počet ponožek ve vaší domácnosti, naučte se několik zajímavých slov švédsky, změřte, jak dlouho vydržíte pod vodou ve vaně či meditujte. Na následující úkon totiž budete potřebovat klidnou mysl. Váš čtyřúhelníkový dort rozřežte na libovolné množství rovnoramenných trojúhelníků, které poté budete slepovat krémem.

Úloha 5.A. Nechť $A \neq B$ jsou body v rovině. Určete množinu všech bodů C v rovině takových, že ABC je rovnoramenný trojúhelník.

Dovolíme si nyní zmínit několik zajímavých náhodných faktů ze světa dortů. Tak například světový rekord v největším počtu svíček na narozeninovém dortu vytvořily v roce 2016 Ashrita Furman a Sri Chinmoy Center v New Yorku, kdy bylo zapáleno 72 585 svíček. Dort byl vytvořen na oslavu narozenin učitele meditace Sri Chinmoy k jeho 85. narozeninám a 100 členů centra se sešlo, aby dosáhli světového rekordu.

Nejvyšší dort na světě vyrobili členové školy v Jakartě a byl vysoký 108 stop a 3 palce, nejdražším dortem na světě byl pak dort pojmenovaný „Pirates Fantasy“ v hodnotě asi 35 milionů dolarů.

A závěrem, jeden z největších narozeninových dortů na světě byl vyroben ke stoletému výročí Las Vegas. Na oslavu byl vyroben dort o váze 6,18 tuny, což je téměř váha slona afrického.

Pokud vás tato čísla vyděsila, nemusíte se ničeho obávat. Ten váš dort může vážit třeba jen $\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$ *kilogramu. Koneckonců, je jen na vás, jestli se některý z rekordů rozhodnete pokusit pokořit.*

Úloha 5.B. Určete, kterému celému číslu je roven výraz

$$\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}.$$

Své tvrzení dokažte.

V této chvíli máme upečený korpus rozřezaný na různé trojúhelníky. Přidáme k nim všechny trojúhelníky ABC, pro které existuje kružnice protínající stranu AC v bodech C a X a stranu AB v bodech B a Y a slepíme je s těmi z dortového korpusu marmeládou či krémem. Nezapomeňte, že čím kubističtější dort, tím lépe.

Úloha 5.C. Najděte všechny trojúhelníky ABC takové, že existuje kružnice protínající stranu AC v bodech C a X a stranu AB v bodech B a Y, přičemž platí: $|CX| : |AX| = |BY| : |YA|$. Body X a Y jsou vnitřní body úseček AB a AC.

BRKOS Team

Následuje chvíle, kdy je potřeba upečený dort nazdobit. Rozpustíme čokoládu, přidáme smetanu a vytvoříme hladkou polevu. Tou naše dílo polijeme.

Ještě než stihne čokoláda zaschnout, dort dozdobíme libovolnými kusy ovoce – výborné budou určitě maliny, borůvky nebo jahody, ale můžete být i originálnější. Dejte si ovšem pozor na způsob, jakým ovoce na dort umístíte. Je to poslední krok dnešního receptu, dejte si na něm proto obzvláště záležet. Není vůbec jednoduchý, proto popíšeme pouze variantu pro umisťování ovoce v rovině; uzpůsobení postupu na povrch dortu přenecháváme čtenáři jako cvičení.

Úloha 5.D. Vybereme si v rovině tři body A, B a C, které nejsou v degenerované pozici; tzn. trojúhelník ABC nemá žádný z vnitřních úhlů větší než 120°. Dále sestrojíme rovnostranný trojúhelník nad úsečkou AB (mimo trojúhelník ABC) a spojíme třetí bod tohoto rovnostranného trojúhelníka s bodem C. Získáme tak přímku c. Podobně vytvoříme přímku a tak, že sestrojíme rovnostranný trojúhelník nad BC a spojíme jeho třetí vrchol s bodem A. V místě, kde se protíná přímka c a a, můžeme umístit libovolný kus ovoce.

Přemýšlíme nad umístěním dalšího kusu ovoce, ale zatím máme stanovenu pouze polohu bodů A a B. Kde všude můžeme ovoce umístit, pokud neznáme polohu bodu C?

Dostali jsme se do fáze, kdy je dort hotov a čeká na snězení! Dodáme poslední náhodný fakt, a sice že jistý Patrick Bertoletti, soutěživý jedlík z Chicaga, kterému se přezdívalo „hluboký talíř“, vytvořil v roce 2012 světový rekord v tom, že snědl 72 cupcaků za šest minut. Tento rekord se ale možná radši nepokoušejte prolomit, a dort si radši pomalu vychutnejte. A dejte si k němu nějaké brkosí úlohy.

Gratulujeme k dokončení kurzu a přejeme dobrou chuť!

Svá řešení uploadujte na našich stránkách:
`http://brkos.math.muni.cz/`

BRKOS Team