BRněnský KOrespondenční Seminář

XXVIII. ročník

2021/2022

Zadání 4. série

Projektivní prostor

Termín odeslání: 14. 3. 2022

Text psaný kurzívou není součástí úloh. Součástí 4. série je také krátký studijní text, který ti může pomoci při řešení úloh 4.1. – 4.4.

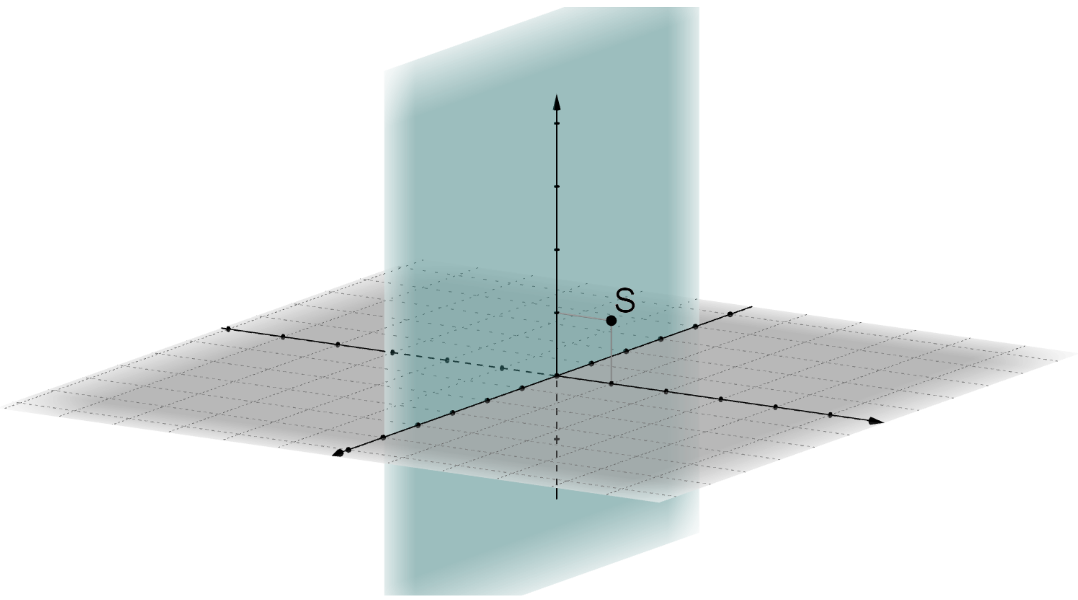
Milí příznivci originálních kulinářských zážitků a (nejen) matematických výzev,

vítejte u čtvrtého dílu zábavného (občas), nevšedního (vždy) a život obohacujícího seriálu plného závorek. Věříme, že naše společnost se ke konci kurzu bude moci pyšnit faktem, že Brkos jest prostředím s nejvyšší koncentrací matematiků ovládajících kuchařské řemeslo na světě.

Jeden moudrý muž (shodou okolností organizátor Brkosu, milovník čokoládových dortů, matematiky a bublinkových fólií) tvrdí, že jednou z podmínek chutnosti zeleniny je její červená barva. Z tohoto důvodu jsme se tentokrát rozhodli zvolit pokrm, který obsahuje velké množství rajčat. V kombinaci s mozzarellou, bazalkou a těstem vytvoříme jeden z nejznámějších a nejoblíbenějších pokrmů světa – pizzu.

Nejdříve si připravíme rajčatový základ, na který umístíme mozzarelové body podle následujícího postupu:

Úloha 4.1. Z rajčatového (červeného) trojrozměrného souřadnicového systému x, y, z ochuťme mozzarellou (nabarvěme na bílo) ty body, jejíž $z-$ová souřadnice je 0 a $x-$ová nebo $y-$ová je celočíselná (měla by vyjít čtvercová mřížka). Dále uvažme bod $S = [1, 0, 1]$ a mozzarelovými přímkami jej spojme s každým mozzarellovým bodem. Nakonec uvažme rovinu ν takových bodů, jejichž $x-$ová souřadnice je nulová (viz obrázek). Kde se nacházejí průsečíky mozzarelových přímek s rovinou ν? Znázorněte rovinu ν (ne celou, stačí nakreslit jen malou část roviny – čtverec zadaný body $[0, y, z]$, kde $y \in (-1, 1), z \in (0, 2)$).



Dostáváme se do kroku, kdy je potřeba vyválet těsto. Nejlepšího výsledku docílíte, když těsto vytvarujete v klasické projektivní rovině $\mathbb{R}P^2$.

Úloha 4.2. V projektivní rovině $\mathbb{R}P^2$ (klasická projektivní rovina) jsou dány dva vlastní body A, B. Pro které (i nevlastní) body $X \in \mathbb{R}P^2$ je odchylka přímek $\overleftrightarrow{AX}$ a $\overleftrightarrow{BX}$ rovna nule (tj. přímky $\overleftrightarrow{AX}$ a $\overleftrightarrow{BX}$ jsou rovnoběžné nebo totožné)?

Zásadním bodem přípravy pizzy je vytvarování těsta do dokonalého tvaru. Doporučujeme zvolit takový tvar, aby pizzám bylo možno obepsat kružnice k, l *z následujícího příkladu.*

Úloha 4.3. Uvažme úhel AVB, přímku $p = AB$ a obě dvě kružnice k, l, které se dotýkají ramen úhlu a přímky p. Body dotyku kružnic k a l s přímkou p označme po řadě K a L. Dokažte, že $|AK| = |BL|$ (případně $|AL| = |BK|$).

V případě, že byste si proces přípravy pizzy rádi ozvláštnili, doporučujeme metodu, jejíž jméno jest pizza freestyle. Odborné zdroje (wikipedie) tvrdí následující:

„Pizza freestyle (též pizza akrobacie) je sportovní odvětví, při kterém se hází s těstem na pizzu nebo s gumovým diskem, který má podobné vlastnosti jako pizza těsto. Tato tzv. pizza show se předvádí do rytmu hudby. Pizzař nechává pizza těsto létat a točit se okolo něj, zatímco těsto za pomocí odstředivé síly zvětšuje svůj průměr.

Po vytvoření vhodného tvaru a mnoho zážitcích s pizza akrobacií umístíme na těsto takzvané Sugo di pomodoro, tedy omáčku z rajčat, pepře, soli, bazalky a olivového oleje, rozpálíme troubu či pec, a podíváme se na to, co je to kolineace.“

Úloha 4.4. Kolineace je zobrazení v projektivní rovině, které zachovává přímky, tj. leží-li tři body (i nevlastní) na jedné přímce, pak leží na jedné přímce i jejich obrazy. V projektivní rovině jsou dány vlastní body A, B, S, U v obecné poloze (tj. žádné 3 body neleží na jedné přímce a žádné dvě dvojice bodů nezadávají rovnoběžné úsečky). Pro kolineaci $F : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^2$ víme, že platí:

$$F(A) = A, F(B) = B$$

$$F(U) \text{ je nevlastní}$$

$$F(X) \in \overleftrightarrow{XS},$$

kde X je libovolný zobecněný bod. Které body se zobrazí na nevlastní?

Na směs dále naskládáme suroviny dle chuti – může se jednat o sýry, zeleninu, uzeniny a mnohé další (kromě ananasu). Možností je nekonečně mnoho. Stejně jako $k \in \mathbb{N}$ *takových, že* $1 + 8k = n^2$ *pro nějaké* $n \in \mathbb{N}$. *Dokažte to.*

Úloha 4.A. Ukažte, že existuje nekonečně mnoho $k \in \mathbb{N}$ takových, že $1 + 8k = n^2$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$.

Dostáváme se do chvíle, kdy je potřeba nachystat tabuli. Nejprve si udělejme pořádek v gastronomických pojmech. Jestli nepatříte mezi odborníky v gastronomii, je dost možné, že mezi výrazy stolničení a stolování nevidíte rozdíl. Pletete se. Stolování označuje to, jak se u stolu máme chovat. V rámci stolničení se učni a studenti naopak dozvídají, jak má *vypadat správně prostřený stůl pro různé příležitosti, co kam na stole patří a co si jako hostitel nemůžete nikdy dovolit.*

Úloha 4.B. Je potřeba prostřít stůl pro n lidí. Kuba proto položil na jedno z míst u stolu štos talířů ležících na sobě. Spodní polovinu štosu tvoří n mělkých talířů, horní polovinu tvoří n hlubokých. Kuba by rád, aby na každém z n míst u stolu byl na konci jeden mělký talíř a na něm jeden hluboký. Kolika nejméně pohyby toho jde docílit? Za jeden pohyb považujeme vybrání nějakého štosu talířů, který se na stole vyskytuje a rozdělení ho v nějaké výšce na dva menší štosy, přičemž ten horní může položit kamkoliv na stůl (zejména na nějaký již jiný štos).

V případě, že byste se v některém z předchozích kroků rozhodli být rebelové, jít proti pravidlům italské kuchyně (a tím pádem i dobrých mravů) a udělali byste pizzu ve tvaru šachovnice, doporučujeme následující postup:

Úloha 4.C. Mějme klasickou šachovnici 8×8, kterou rozdělíme na obdélníky $m \times n$, kde $m, n \in \mathbb{N}$ značí počet čtverečků na stranách obdélníků (tzn. rozdělujeme podél hranic čtverečků, nepůlíme je ani nijak nerozdělujeme). Tyto obdélníky splňují dvě pravidla:

1. Každý obdélník má v sobě stejný počet mozzarelových (bílých) jako rajčatových (červených) polí.
2. Neexistují dva obdélníky, které by byly tvořeny stejným počtem čtverečků.

Označme jejich počet a, najdi největší možné a a všechna možná rozdělení obsahů těchto a obdélníků. Ke každé možnosti uveď příklad toho, jak šachovnici na takovéto obdélníky rozdělit. (Pozn.: čtverec je též obdélník ;))

Následně dáme těsto do trouby. Pravá italská pizza se peče 7 *až* 11 *minut v kamenné peci nebo horkovzdušné troubě při teplotě* 250-300° *C. V závěru stačí vyřešit hezkou rovnici, protože každý matematik, kuchař i absolvent našeho kurzu ví, že po libovolném množství diofantických rovnic jakékoliv jídlo chutná mnohem lépe.*

Úloha 4.D. Řešte diofantickou rovnici $x^3 - y^3 = 11^z$.

Dobrou chuť!

P.S.: Rozhodnete-li se kterýkoliv z receptů vyzkoušet, celý Brkos tým bude více než nadšen, pokud se s námi podělíte o fotografii dokumentující vaše snažení!

Pokračování v příští sérii.

Svá řešení uploadujte na našich stránkách:
`http://brkos.math.muni.cz/`

BRKOS Team