BRněnský KOrespondenční Seminář

XXVIII. ročník

2021/2022

Zadání 3. série

Kombinatorické hrátky s tabulkami

Termín odeslání: 31. 1. 2022

Text psaný kurzívou není součástí úloh.

Vážení přátelé,

nastává čas roku, kterého se nejedno dítko, ba i dospělý, nemůže dočkat. Za okny se snáší první vločky sněhu, mráz na sklech kouzlí magické obrazce a v našich obývácích se rozsvěcují světýlka. Ano, pomalu, ale jistě se blíží čas Vánoc. Jistě mi dáte za pravdu, že bez některých věcí si tyto svátky nelze představit. Vzduch voní jehličím, pomerančem a všemožným cukrovím. Každá rodina má oblíbený jiný druh, bez jednoho by ale Vánoce nebyly Vánocemi. Umíte si je vůbec představit bez vanilkových rohlíčků?

V dnešním díle našeho kulinářského pořadu se proto podíváme na to, jak tuto dobrotu připravit. Mezi cukrovím na štědrovečerní tabuli by vám určitě neměla chybět. A co teprve při sledování vánočních pohádek a počítání brkosích příkladů.

Ze všeho nejdříve si připravíme vše potřebné – mouku, ořechy, cukr, vejce a citronovou kůru. Dále se určitě neobejdeme bez pečicího papíru. Protože Vánoce jsou obdobím, kdy je všechno nazdobené a barevné, i pečicí papír by měl mít styl.

Úloha 3.1. Mějme mřížkový pečicí papír složený z 20×20 čtvercových políček. Kolika způsoby lze vybarvit právě 4 políčka tak, aby každé vybarvené políčko mělo vybarveného aspoň jednoho souseda (sdílejícího hranu)?

Než se pustíme do práce, je příhodné si udělat menší historickou odbočku. Věděli jste, že rohlíčky mají původ ve Vídni? Vídeň totiž dvakrát neúspěšně obléhali osmanští Turci (v roce 1529 a 1683), kteří měli ve znaku půlměsíc. Traduje se, že vídeňští pekaři na počest druhého vítězství (a také aby zesměšnili své protivníky), začali vyrábět právě rohlíky a rohlíčky v daném tvaru. Osmanští Turci byli ale naopak zběhlejší v matematice. Když se chtěli vysmát Vídeňským, dávali jim záludné úlohy a potom se jim posmívali, když je nevyřešili. Jedna z nich mohla vypadat třeba takhle:

Úloha 3.2. Je dána tabulka 628×628 polí. Na každém poli se nachází jednička nebo nula. Můžeme na ní dělat tyto operace:

- Prohodit dva libovolné řádky nebo dva libovolné sloupce.
- Vzít sloupec a přidružit ho k jinému sloupci. Sloupec S ke sloupci T přidružíme tak, že i-té číslo ve sloupci S přičteme k i-tému číslu ve sloupci T. Pokud je výsledné číslo dva, nahradíme ho nulou.
- Cyklicky posunout čísla v n-tém řádku o n doprava. Tedy i-té číslo v n-tém řádku posuneme na pozici $i + n$, pokud je $i + n < 628$, a na pozici $i + n - 628$ jinak.

Je možné začít se čtvercem 50×50 složeným z jedniček umístěným někde v tabulce a skončit s jedinou jedničkou v celé tabulce?

BRKOS Team

A proto se Vídenští věnovali spíše pečení, třeba právě vanilkových rohlíčků. Dost bylo ale historie, vraťme se k práci. Na přípravu rohlíčků používejte vždy a pouze máslo. Žádný rostlinný tuk nedodá cukroví tu neodolatelnou máslovou chuť a vůni. Aby se vám s těstem dobře pracovalo, máslo musíte nechat změknout v pokojové teplotě. Dlouhou chvíli, než změkne, si můžete zkrátit třeba hraním lodí.

Úloha 3.3. Ježíšek se Santou hrají speciální variantu lodí. Na čtverečkovaném papíře o rozměrech 2021×2021 čtverečků někam Ježíšek umístil jednu fregatu, t.j. vyznačil tři čtverečky za sebou v řadě (nebo sloupci) tak, aby to Santa neviděl. Následně Santa střílí (každá střela znamená, že se zeptá, jestli se na nějakém čtverečku část fregaty nachází), dokud fregatu netrefí. Určete nejmenší počet střel, které Santa v nejhorším případě musí učinit, aby fregatu alespoň jednou trefil.

Než se pustíme do samotné přípravy rohlíčků, čeká nás ještě činnost, která možná není příliš oblíbená, protože je poměrně pracná – louskání ořechů.

Úloha 3.4. Mějme tabulku $n \times m$. Na každém jejím políčku je právě jedna polovina ořechu. Všechny ořechy jsou položené na políčka jedním ze dvou způsobů: vzhůru skořápkou nebo jádrem. Dva ořechy jsou sousedící, pokud se jejich políčka dotýkají hranou nebo rohem. V jednom tahu je možné otočit jeden ořech a všechny ořechy s ním sousedící. Na začátku tvoří ořechy vzor šachovnice (střídají se tedy ořechy, u kterých směřuje vzhůru skořápka a jádro). Popište, jak pomocí otáčení zařídit, aby všechny ořechy byly otočeny stejnou stranou nahoru. Pro které dvojice (m, n) to lze?

Prosátou mouku, cukr, ořechy, máslo, žloutky a citronovou kůru vypracujte na hladké a kompaktní těsto. Musí být hladké minimálně jako vaše řešení této soustavy rovnic:

Úloha 3.A. Nalezněte všechna celočíselná řešení následující soustavy rovnic:

$$x^2 - y^2 = z^2,$$
$$x - y = z.$$

Těsto zabalte do fólie a nechte aspoň 2 hodiny (nebo přes noc) odpočinout v ledničce. Než se těsto uleží, vyřešte několik funkcionálních rovnic.

Úloha 3.B. V závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$ řešte funkcionální rovnici

$$f(ax + y) = a^2 f(x) + y,$$

kde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Pak z těsta utvořte váleček o průměru asi tři centimetry, ze kterého odkrajujte stejně velké dílky. Ty poté rozválejte na menší válečky, zahněte je do tvaru rohlíčků a pečte na plechu pokrytém pečicím papírem při 180°C asi 10 minut (rohlíčky by měly jen lehce zespoda zezlátnout). Jedinečné chuti i estetického efektu dosáhnete v případě, kdy rohlíčky budou kopírovat tvar části pěkných, elegantních kružnic.

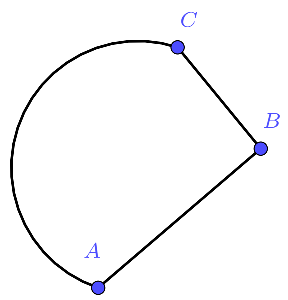
Úloha 3.C. Kružnice k a l se protínají v bodech A a B. Zvolme bod C na kružnici k tak, aby průsečík přímky AC s kružnicí l ležel uvnitř úsečky AC. Označme tento průsečík

D. Bod E je průsečík BC s kružnicí l a leží mimo úsečku BC. Bod F je průsečík BD s k a leží mimo úsečku BD. Ukažte, že $|\measuredangle CED| = |\measuredangle DFC|$.

Upečené rohlíčky vyndejte z trouby, nechte asi tři minuty odpočinout a pak obalujte ve vanilkovém cukru. Po vyndání z trouby jsou velmi křehké, buďte při jejich obalování opatrní – mohli byste je snadno zlomit a zničit tak jejich ladné křivky! Pokud by k takovému neštěstí přece jen došlo, podívejte se na jiné křivky, neméně pěkné.

Úloha 3.D. D. Ukažte, že pro všechna přirozená čísla $n \geq 3$ existuje uzavřená neprotínající se křivka K (tedy nemá začátek ani konec, příklad na obrázku) s následujícími vlastnostmi:

1. má alespoň jednu osu souměrnosti,
2. vymezuje konvexní útvar v rovině,
3. existuje n-úhelník vepsaný K s maximálním obsahem (mezi všemi vepsanými n-úhelníky), který není osově souměrný (podle žádné osy).



A to je pro tentokrát vše. Dobrou chuť a šťastné a veselé!

Pokračování v příští sérii.

Svá řešení uploadujte na našich stránkách:
`http://brkos.math.muni.cz/`

BRKOS Team