BRněnský KOrespondenční Seminář

XXVIII. ročník

2021/2022

Zadání 2. série

Polynomy

Termín odeslání: 13. 12. 2021

Text psaný kurzívou není součástí úloh. Pokud odesíláš své první řešení, nezapomeň se prosím před jeho odesláním zaregistrovat na našich webových stránkách `http://brkos.math.muni.cz/`.
Součástí 2. série je také krátký studijní text, který ti může pomoci při řešení úloh 2.1. – 2.4.

Vážení a milí příznivci matematiky, špatného humoru a kulinářských zážitků,

vítejte u druhého dílu neotřelé kuchařské show. Dnes se společně podíváme na to, jak připravit míchaná vejce. Možná si právě říkáte: „Taková jednoduchá věc, to přece umí udělat i malé dítě!" Nenechte se však ukolébat a neusněte na vavřínech. Je to totiž úkol těžší, než se na první pohled může zdát.

Budete potřebovat několik ingrediencí, především (SPOILER ALERT!) vejce. Bude se vám hodit přibližně tolik kusů, kolik uplynulo let od narození pána, kvůli kterému začala západní společnost slavit Vánoce. Bystřejší z vás už asi tuší, že toto číslo odpovídá aktuálnímu letopočtu.

Úloha 2.1. Nalezněte polynom f, pro který platí $f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3, f(4) = 2021$.

Ještě než se pustíte do práce, najděte všechny polynomy P s reálnými koeficienty vyhovující rovnici $P^3 - 2xP^2 + (4x - 1)P = 6x - 6$.

Úloha 2.2. Najděte všechny polynomy P s reálnými koeficienty vyhovující rovnici

$$P^3 - 2xP^2 + (4x - 1)P = 6x - 6$$

(tj. polynomy, pro něž rovnice platí pro každé $x \in \mathbb{R}$). Správnost svého řešení dokažte.

Pokrm, který nemá nic společného s prvočísly, je jako polynom bez absolutního členu. K 2021 připraveným vejcím proto přidáme libovolný prvočíselný počet cibulí, které nakrájíme na drobné kousky.

Úloha 2.3. Normovaný polynom $P(x)$ s celočíselnými koeficienty splňuje následující vlastnost: pro každé prvočíslo p platí, že hodnota $P(p)$ je opět prvočíslo. Dokažte, že pokud je $P(0)$ dělitelné právě k prvočísly, kde k je přirozené číslo větší než 1, má polynom P stupeň alespoň k.

Bylo-li toho na vás moc, vaření si doporučujeme zpříjemnit nějakou ostřejší tekutinou. Dejte si ovšem pozor, abyste se v důsledku jistých chemických procesů ve vaší krvi nestali rozvernějšími než p-rozverné polynomy. Kulinářský zážitek by totiž nemusel dojít do zdárného konce.

Úloha 2.4. Označme množinu všech polynomů v proměnné x s celočíselnými koeficienty jako $\mathbb{Z}[x]$. Nechť p je prvočíslo, pro které neexistuje $c \in \mathbb{Z}$ takové, že $c^2 \equiv -1 \pmod{p}$.

BRKOS Team

Polynom $f \in \mathbb{Z}[x]$ nazveme p-rozverný, jestliže lze napsat ve tvaru $p \cdot h(x) + (x^2+1) \cdot k(x)$ pro nějaké polynomy $h, k \in \mathbb{Z}[x]$. Dokažte, že pokud je součin dvou polynomů p-rozverný, je alespoň jeden z nich rovněž p-rozverný.

Nachystáme si další ingredience – máslo, sůl, pepř, slaninu a náhodný hezký matematický příklad. A protože matematika je občas jednodušší než vaření, pustíme se nejdříve do oné úlohy.

Úloha 2.A. Máme čtverec 2021×2021 políček a chceme ho nějak ozdobit. Rozhodli jsme se, že do něj postupně napíšeme všechna čísla od jedničky až dokud to půjde, a to ve tvaru spirály. Uděláme to tím způsobem, že začneme v horní řadě, na jejím konci se stočíme dolů a tak dále.

Do každého políčka se ale vejde jen jedna cifra, delší čísla proto musíme napsat do více políček (10 do dvou – do prvního jedničku, do druhého nulu). Jakou cifru napíšeme do políčka uprostřed našeho čtverce s 2021×2021 políčky?

Příklad takového čtverce pro 5×5 políček:

1	2	3	4	5
1	3	1	4	6
2	1	**7**	1	7
1	6	1	5	8
1	1	0	1	9

Dostáváme se k dalšímu zásadnímu kroku – k volbě pánve. Ano, slyšíte dobře – i na velikosti pánve záleží. Samozřejmě by měla mít nepřilnavý povrch, to je jasné. Na malé pánvičce navíc vejce pro celou rodinu neumícháte (obzvláště když jich máte 2021), a naopak – pokud zvolíte pánev zbytečně velkou, vejce se předčasně vysuší a nebudou dobrá. Ideální je pánev, které lze opsat pěknou kružnici, například tuto:

Úloha 2.B. Uvažujme kružnici k a na ní tři různé body A, B, C. Označme kolmici na AB v bodě A jako p a kolmici na BC v bodě C jako q. Dokažte, že průsečík přímek p a q leží na kružnici k.

Zatímco budete dokazovat, že průsečík přímek p a q leží na kružnici k, míchejte vejce až do chvíle, kdy budou mít krémovou konzistenci. Základ je dělat vejce velmi pomalu a neustále je míchat – ne nadarmo se jmenují míchaná! A záleží i na směru a technice, vejce se musejí míchat od krajů do středu, aby byla rovnoměrně propečená. Například kuchařský mistr Gordon Bramsay doporučuje při míchání střídat po deseti vteřinách pozici na plotně a mimo ni. Tvrdí, že tak uchováme vláčnost vajec. Gordon Bramsay je mimo jiné vaječným magnátem v Brkolandii.

Úloha 2.C. V továrně Gordona Bramsayeho na míchaná vejce je 2021 kuchyní očíslovaných 1 až 2021 a všechny jsou zhasnuté. Zároveň má továrna 2021 robotů, kteří jsou též očíslováni 1 až 2021. Robot s číslem i má za úkol v každé kuchyni s číslem dělitelným i přepnout i-krát stav žárovky (ze zhaslé na rozsvícenou a zpět). Postupně pošleme všechny roboty 1 až 2021 po celé továrně. Kolik kuchyní bude nakonec rozsvícených?

Nyní již stačí jen umístit vejce na vhodný talíř. Jak ale asi tušíte, ani to nebude zcela jednoduchým úkolem. Vejce umístěte do tětivového čtyřúhelníku vepsaného do k. Výsledná chuť bude naprosto jedinečná!

Úloha 2.D. Je dána kružnice k s poloměrem r. Určete maximální obsah tětivového čtyřúhelníku vepsaného do k v závislosti na r.

Hotový pokrm dozdobíme pažitkou či jinou oblíbenou bylinkou, poplácáme se po rameni, jak jsme náročný úkol hezky zvládli, zatlačíme případné slzičky nad nepovedeným výsledkem a můžeme se pustit do jídla.

Dobrou chuť!

Svá řešení uploadujte na našich stránkách:
`http://brkos.math.muni.cz/`

BRKOS Team