

# BRněnský KOrespondenční Seminář



XXVIII. ročník  
2021/2022

Zadání 1. série

# ÚVODNÍ SALÁT

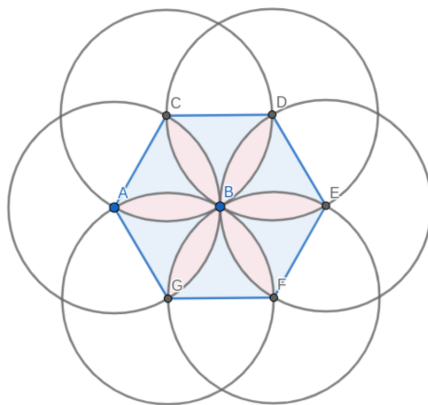
Termín odeslání: 18. 10. 2021

**Text kurzívou není součástí úloh. Pokud odesíláš své první řešení, nezapomeň se prosím před jeho odesláním zaregistrovat na našich webových stránkách <http://brkos.math.muni.cz/>.**

*Salát je velmi univerzálním pokrmem. Může sloužit jako hlavní chod, předkrm nebo jako příloha. Velmi často je salát spojován s čerstvou zeleninou. Už základní slovo salát může přeci jen označovat konkrétní druh zeleniny! Přesto existuje nespočet druhů a typů salátů, z nichž některé zeleninu nemusí obsahovat vůbec. V dnešním díle naší kulinařské show si ukážeme, jak připravit pokrm, jehož název je podobný oblíbenému salátu coleslaw. Nenechte se ovšem zmást, dnes se zaměříme na to, jak udělat správný brkoslaw.*

*Na přípravu salátu brkoslaw je potřeba několik důležitých ingrediencí. Jeho nejdůležitější složkou jsou především dobré bylinky. Ty totiž ke kuchyni a vaření patří odjakživa. Stačí trocha té správné a pokrm dostane hned úplně jiný rozměr. Do brkoslawu je ovšem třeba dát bylinky s geometricky přesnými květy. Ty vypadají takto:*

**ÚLOHA 1.1.** Je dán pravidelný šestiúhelník a šest kružnic o poloměru 1, každá se středem v jiném vrcholu a procházející středem šestiúhelníku. Jaký je obsah růžové květiny na obrázku?



*Bylinky je nejlepší nasbírat za úplňku a nechat je usušit. Než se bylinky usuší, je vhodné se podívat na nějaký hezký geometrický příklad. Sušení potom probíhá rychleji a z bylinek se uvolní silnější aroma.*

**ÚLOHA 1.2.** Nechť je dána kružnice  $k$  a body  $A$  a  $B$ , které na ní leží. Tečny ke kružnici  $k$  rovnoběžné s  $AB$  se dotýkají kružnice v bodech  $C$  a  $D$ . Zvolme body  $E$  a  $F$ , tak, že  $C$  je střed úsečky  $AE$  a  $D$  je střed úsečky  $BF$ . Dokažte, že  $AF$  je rovnoběžná s  $BE$ .

*Důležitou složkou salátu jsou, kromě základních ingrediencí, zálivky a dresingy. Jak už název napovídá, zálivka je přeliv, který zvýrazňuje chuť salátu. Dressing je naopak chuťově*

*doplňující, proto bývá častěji hustější a připomíná omáčku. A stejně jako sýry patří k Francii a čokoláda ke Švýcarsku, dresingy jsou neodmyslitelně spjaté s Brkolandií. Ta totiž patří mezi největší vývozců dresingů po celém světě. Metropolí dresingu je potom hlavní město Brkolandie Hloupětín.*

**ÚLOHA 1.3.** V Hloupětíně postavili mrakodrap o  $n$  patrech, kde každé patro mělo 1 až  $n$  oken. Podmínka byla, aby pro každá dvě patra mělo to vyšší z nich alespoň tolik oken jako to nižší z nich. Dokažte, že existuje patro  $m$  s  $m$  okny (čili má přesně tolik oken, kolikáté je v pořadí odspodu).

*Kromě bylinek a dresingu dávají brkoslawu jedinečnou chuť také semínka. Do každé porce salátu nasypeme  $n$  semínek.*

**ÚLOHA 1.4.** Mějme  $n$  různých černých bodů v rovině, pro které platí, že žádné tři neleží na jedné přímce. Tyto body můžeme přemísťovat, a to jediným způsobem: vyznačíme kdekoli v rovině červený bod, kolem kterého otočíme černý bod o libovolný úhel. Dva body budeme považovat za různé, jestliže nemají stejnou polohu v prostoru, proto pokud bychom například přemístili jeden černý bod přímo na druhý, pak splynou a stane se z nich jeden jediný.

Určete nejmenší počet různých červených bodů (v závislosti na  $n$ ) nutných k tomu, aby bylo zaručeno, že všechny černé body splynou v jeden.

*Již jsme si řekli, jak důležité jsou pro přípravu brkoslawu bylinky. Je ovšem třeba si dát dobrý pozor na to, aby mezi nimi nebyl žádný třináctilístek. Ten totiž může působit neštěstí či se projevovat projímavými účinky.*

**ÚLOHA 1.A.** Biolog Pandula se rozhodl, že vymytí ze světa neštěstí tím, že vyrobí třináctilístek. Začal sbírat trojlístky po světě a navzájem je křížit a získávat tak nové  $n$ -lístky. Zjistil, že pravidla pro křížení  $k$ -lístku a  $l$ -lístku (kde  $k \leq l$ ) jsou následující:

1. pokud  $k$  i  $l$  jsou prvočísla, tak získá  $(l + 1)$ -lístek,
2. pokud jedno je prvočísla a druhé není, tak získá  $\frac{k+l}{2}$ -lístek (pokud by výsledek nebyl celé číslo, tak zaokrouhlíme nahoru),
3. pokud jsou  $k$  i  $l$  složená, tak získá  $2l$ -lístek.

Může Pandula někdy získat kýžený 13-lístek?

*Základem zeleninového salátu je zelenina krájená na menší kousky. K nakrájení zeleniny budeme potřebovat: zeleninu, prkénko, nůž a pravítko. Pravítkem odměřujeme hezké trojúhelníky, které následně umístíme do větší mísy a pečlivě promícháme.*

**ÚLOHA 1.B.** Nechť  $ABC$  je libovolný trojúhelník. Označme  $S$  střed strany  $AB$  a  $P_C$  patu výšky spuštěnou z bodu  $C$  na stranu  $AB$ . Dokažte, že platí  $|AC|^2 - |BC|^2 = 2|AB||SP_C|$ .

*Salát necháme uležet v lednici do dalšího dne a v mezidobě se můžeme v klidu věnovat dalšímu matematickému příkladu.*

**ÚLOHA 1.C.** Kružín a Zrcadlín hrají v rovině následující hru: Střídají se v tazích s tím, že Kružín začíná a každý udělá právě 2021 tahů. Kružín ve svém tahu umístí do roviny kruh o poloměru 1. Zrcadlín umístí přímkou a celou rovinu (všechny útvary, které se v rovině objevily před umístěním) zobrazí v osově souměrnosti podle této přímky. Kružínův cíl je, aby na konci v rovině bylo co nejvíce útvarů. Útvary, které splynou (protože jsou zobrazeny na sebe navzájem nebo protože jsou umístěny tam, kde už nějaký útvar je) se počítají jako jeden. Kolik nejméně může na konci hry v rovině být útvarů, pokud Kružín hraje nejlépe, jak to jde?

*V závěru přípravy brkoslawu už jen stačí dokázat, že:*

**ÚLOHA 1.D.** Dokažte, že soustava rovnic

$$\begin{aligned}a + b &= c + d \\ a^3 + b^3 &= c^3 + d^3 + K\end{aligned}$$

má celočíselné řešení právě tehdy, když  $K$  je celočíselný násobek čísla 6.

*Brkoslaw můžeme dochutit špetkou Fermatovy věty, citronovou šťávou, grupami, dokonalými čísly, pepřem a solí.*

*Dobrou chuť!*

**Pokračování v příští sérii.**

**Svá řešení uploadujte na našich stránkách:**

<http://brkos.math.muni.cz/>