Zadání 6. série

HRÁTKY S CIFRAMI

Termín odeslání: 3. 5. 2021

Upřednostňujte prosím formu elektronického zasílání svých řešení přes "Submitovátko"na našem webu.

Text kurzívou není součástí úloh.

„Au!“ ozvalo se.

„Nešťouchej do mě!“ odpověděl naštvaný hlas.

„Když já tě nevidím!“ postěžoval si druhý.

V místnosti se ozývaly rány a kašlání a skupinka se rozkoukávala okolo sebe. Po chvíli se rozvířený prach konečně usadil a skupinka spatřila krystal, který ležel opodál rozlomený na dva kusy.

„Klenot je zničený!“ zazoufala Liběnka.

„Co bude s Ňoumou a Elvírkou?“ svraštila obočí Bubla.

„Nezoufejte, přátelé,“ zahuhlal pan José, který se vyškrábal zpoza jedné z antických soch, která dřív majestátně střežila Šanganjosechitinský klenot. Nyní jí chyběla paže, měla ulomený nos a povalovala se na zemi. Pan José nevzrušeně odhodil upadnutou ruku. Měl roztrhnutou košili a špinavý obličej, ale široce se usmíval.

„Co se to právě stalo?“ nechápal Henry.

„Napadá mě tolik možných vysvětlení, kolik existuje devíticiferných čísel složených pouze z cifer 9 a 7 takových, že jsou dělitelná jedenácti,“ prohodil po krátkém zamyšlení pan José.

ÚLOHA 6.1. Kolik existuje devíticiferných čísel složených pouze z cifer 9 a 7 takových, že jsou dělitelná číslem 11?

Pan José se z ničeho nic zvedl a vydal se k odchodu. „Kam jdete?“ nechápala Bubla.

„No přece do Šanganjosechitinského vězení,“ opáčil José.

„A co s krystalem?“

„Ten už svůj účel splnil, uvidíte.“

Věznice byla velká šedá budova obehnaná ostnatým drátem. Na vrátnici to žilo. Řinčely telefony, dámy za psacími stroji vzrušeně bušily do klávesnic a mužíci v uniformách pobíhali z jedné strany na druhou.

„To je blázinec!“ vyhrkl na ně hlídač místo pozdravu.

„Dobrý den, jdeme navštívit naše známé,“ řekl klidně pan José.

„Musíte mi ovšem sdělit číslo,“ vyštěkl hlídač nekompromisně. „Celý svět se zbláznil, ale některá pravidla ještě musíme dodržovat.“

ÚLOHA 6.2. Hlídač napsal na tabuli n-ciferné číslo, kde se žádná cifra nevyskytuje dvakrát bezprostředně za sebou. Skupinka zná počet cifer n, ale je v jiné místnosti a číslo napsané na tabuli nezná. Má za úkol zjistit, kterou cifru má umazat, aby po umazání nově vzniklé $(n-1)$-ciferné číslo bylo co možná největší. V závislosti na n určete nejmenší počet pozic, na které se skupinka musí hlídače zeptat, aby mohla jednoznačně určit pozici, kterou mají smazat. V řešení také uveďte, na které pozice se skupinka bude konkrétně ptát.

„Tak si jděte," utrousil hlídač.

„Promiňte, ale co se tady stalo?" zeptal se Matěj.

„Byl tady obrovský výbuch a pak... všechna selata byla pryč! Proměnila se zpátky v lidi! Nevím, co s námi udělá Cornelie, až se tohle dozví," rozhodil hlídač bezmocně rukama. Pan José se na skupinku usmál vševědoucím úsměvem. „Vidíte? Klenot splnil svůj účel. Jeho kouzelná moc pomohla Šanganjosechitinu tehdy, kdy to nejvíc potřeboval." Načež se obrátil na hlídače: „A vy jděte slavit! O madam Cornelii se už zajímat nemusíte."

Hlídač překvapeně zamrkal a pak mu v očích blýsklo pochopení.

„Pane José! To jste vy! Jste zpět! Zdálo se to jako tolik měsíců, kolik musí mít číslo n v desítkové soustavě cifer, aby v něm byla obsažena všechna dvojciferná čísla," vyhrkl dojatě.

„Ale to musíte přehánět," usmál se pan José polichoceně.

Úloha 6.3. Kolik musí mít číslo n v desítkové soustavě cifer, aby v něm byla obsažena všechna dvojciferná čísla (jeho cifry musí být v n těsně za sebou)?

„Musíme najít Ňoumu," přerušila je Bubla.

„Je v jedné z cel s číslem p, které splňuje tyto podmínky," řekl hlídač a vyjmenoval podmínky, které toto číslo musí splňovat.

„Aspoň mu tady bylo trochu hezky, když byl v cele s prvočíslem," usmála se povzbudivě Liběnka.

Úloha 6.4. Najděte všechna prvočísla p taková, že platí následující tvrzení:

Pro každé přirozené k existuje přirozené číslo n splňující následující podmínky:

1. p dělí n;
2. uvážíme-li všechna čísla, která vzniknou z čísla n tak, že cyklicky zaměníme všechny cifry, dostaneme alespoň k různých hodnot (například pro $n = 2530$ bychom cyklickými záměnami dostali čísla 2530, 5302, 3025 a 253);
3. pro každé prvočíslo platí, že pokud dělí alespoň jednu z cyklických záměn čísla n, tak už dělí všechny.

Nezapomeňte dokázat správnost své odpovědi!

Na konci chodby se objevila známá postava. „Kamarádi!" zavolala z dálky.

„Ňoumo!" vrhli se na něj a jeden přes druhého spustili: „Tak rádi tě zase vidíme!"

„Měl jsi co jíst? Jsi nějaký pohublý."

„Jak se ti daří, kamaráde?"

„Jsi v pořádku?"

„Ale jo. Jako seleti mi ale úplně zatuhnul mozek. Něco bych si spočítal nebo zahrál, člověku to chybí," postěžoval si.

„Mám tady speciální Rubikovku," mrknul na něj Kouma a z kapsy vytáhl kostku.

Úloha 6.A. Na Rubikově kostce $3 \times 3 \times 3$ se hraje sudoku tak, že na její políčka na povrchu píšeme čísla. Sudoku vyřešíme, pokud pro každou stěnu kostky platí následující: z kostky odstraníme protilehlou stěnu, rozbalíme ji do pláště tvaru kříže a dále zkontrolujeme, že se žádná dvě čísla neohrožují tak, jako v klasickém sudoku (tedy v každém řádku, sloupci, i čtverci 3x3, který odpovídá jedné stěně kostky, se může nacházet každé číslo nejvýše jednou). Dokažte, že tímto způsobem nelze vyřešit sudoku na Rubikově kostce.

„A co s madam Cornelií?“ zeptala se uprostřed veselého švitoření zamračená Liběnka. „Nemůže být ještě nebezpečná?“

„O tu se bát nemusíš, podívej,“ řekl pan José a vzal ji za ramena. Došel k oknu, kde byl výhled na dvůr věznice. Stála tam madam Cornelie ve svém oranžovém kostýmku a mrskala vším, co jí přišlo pod ruku. Vedle ní stál pan plukovník Motýl v elegantním kabátu a nevzrušeně pokuřoval fajfku.

Úloha 6.B. Madam Cornelie se rozhodla utkat se v lukostřelbě s plukovníkem Motýlem. Každý má deset šípů, které střílí na terč a odstraňují je z něj. V libovolném pořadí oba střílí a odstraňují svoje vlastní šípy, např.

1. Madam Cornelie: vystřelila,
2. Madam Cornelie: vystřelila,
3. Plukovník Motýl: vystřelil,
4. Madam Cornelie: odstranila,
5. Plukovník Motýl: vystřelil, ...

Jediná podmínka je, aby ani jeden neodstranil více šípů, než doposud vystřelil. Kolik různých průběhů hry existuje?

Madam Cornelie vzala luk i zbytek šípů a vztekle s nimi třískla o zem. Na plukovníkovi bylo vidět, že se pobaveně usmívá.

„Ten se o ni postará, nemusíte se vůbec bát,“ řekl pan José při pohledu z okna. „A ještě tu máme jednu novinku,“ usmál se. Do místnosti vstoupil šťastně se usmívající hospodský, který držel za ruku Elvíru. „Bude svatba!“ vyhrkl Ňouma. Dvojice se široce usmála a přikývla.

„Láska je ta nejkrásnější šifra,“ pronesl dojatě pan José.

„No jo. Tahle je ale taky hezká!“ nedal se Ňouma. Skupinka se rozesmála.

Úloha 6.C. Uvažme libovolné slovo, které sestává pouze z prvních sedmi písmen anglické abecedy (za slovo považujeme libovolnou konečnou posloupnost písmen – takže „aaabag“ je také slovo). Proházením písmen podle nějakého klíče v naší sedmiprvkové abecedě zašifrujeme libovolné slovo. Výsledný znak závisí jen na tom, jaký byl původní znak, nikoliv na jeho pozici nebo kontextu. Nezaměňujeme dva znaky za stejný, aby se zpráva dala dešifrovat.

Například, klíč $L = (a \mapsto b, b \mapsto c, c \mapsto a, d \mapsto d, e \mapsto e, f \mapsto f, g \mapsto g)$ aplikovaný na naše slovo „aaabag“ vytvoří slovo „bbbcbg“. Druhou aplikací téhož klíče dostaneme slovo „cccacg“, a konečně třetí aplikací získáme „aaabag“, tedy původní slovo.

Definujme *magické číslo klíče K na slovo w* jako počet aplikací klíče K na slovo w tak, abychom získali původní slovo. Například, magické číslo klíče L na slovo „aaabag“ je 3. Najděte nějaký klíč K a slovo w tak, aby magické číslo klíče K na slovo w bylo co největší.

Na svatbu se sjel snad celý Šanganjosechitin. Lidé slavili, popíjeli a užívali si klidu, který v zemi nastal po dlouhé době. Uprostřed veselice se ke Koumovi se zájmem nahrnul mužík, kterého kdysi potkali u brány Šachového pole a přesvědčili ho, že jsou trojúhelníkoidisté, aby je na pole pustil.

„My jsme se už viděli!“ vyhrkl. „Vy jste bratři trojúhelníkoidisté! Zachránili jste náš Šanganjosechitin! Kdo jiný než trojúhelníkoidisté by to taky zvládl, že ano,“ drmolil.

„Milý pane, musím vám něco říct,“ začal rozpačitě Kouma. „My ve skutečnosti nejsme trojúhelníkoidisté…“

„Ale to přece nevadí,“ opáčil mužík přátelsky a spokojeně si upil piva. „Hlavně že tady máme klid.“

Hostinský se rozesmál. „Já jsem vám to říkal – většinu času se hašteří o tom, co je podstata světa, ale jinak se mají celkem rádi.“

„I tak by vás něco mohlo zajímat, kolego,“ otočil se mužík ke Koumovi. „Byl jsem povýšen a dostal jsem takovouhle krásnou brož!“ pronesl pyšně a ukázal Koumovi maličký zlatý trojúhelník vykládaný drahými kameny. Vypadal takto:

Úloha 6.D. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Uvnitř jeho stran AB a AC leží po řadě body D a E tak, že $|CD| = |DA|$ a $|BE| = |EA|$. Bod F je střed kružnice opsané trojúhelníku ADE. Dokažte, že AF je kolmá na BC.

Z hospody U Tří funkcí se ozývaly veselé zvuky až do rána. Muzika hrála, lidé tančili a zpívali a hospodský s Elvírou měli oči jenom pro sebe. Po nějaké chvíli se dělitelisté opět začali dohadovat o podstatě světa s trojúhelníkoidisty a kubicisty.

„Ale vážený pane, každé malé dítě přece ví, že podstata světa je ukryta v trojúhelnících!“ zahalekal jeden z chlapíků. Kouma se při pohledu na ně usmál. Svět se zdál zase jednou v pořádku.

Těšíme se na vás v příštím ročníku!

Svá řešení uploadujte na našich stránkách:
`http://brkos.math.muni.cz/`