Zadání 5. série

Báze a moduly

Termín odeslání: 29. 3. 2021

Upřednostňujte prosím formu elektronického zasílání svých řešení přes "Submitovátko"na našem webu.

Součástí 5. série je také studijní text, který Ti může pomoct s řešením úloh 5.1 – 5.4. Najít ho můžeš na našem webu v sekci "Zadání a řešení".

Text kurzívou není součástí úloh.

„Přátelé, to je skutečně úžasnoskvoucí, že jste mě našli!“ usmíval se od ucha k uchu pan José.

„Nebýt pana plukovníka Motýla, tak vás ani nenajdeme,“ vysvětlovala Liběnka.

„Co jste tu celou dobu dělal?“ zeptala se Bubla a trochu zamračeně se rozhlédla po místnosti, která vypadala dosti neutěšeně. Pan José seděl u otlučeného dřevěného stolu, který měl jednu nohu podepřenou stohem knih, a nebezpečně se nakláněl na stranu. V místnosti byly jinak jen dvě plechové skříně, rezavé umyvadlo se špinavým zrcadlem a železná palanda, vedle níž se povalovalo množství knih a papírů.

José si všiml, jak se Bubla rozhlíží po místnosti, a téměř omluvně pronesl: „Vím, že to není nic moc, ale exil je exil. Věnovali jsme se samozřejmě odboji. A mimo to jsem si počítal, ani nevíte, jak to bylo příjemné. Člověka to vytrhne z šedi všedních dní.“

Úloha 5.1. V exilu, ve kterém je pan José, se nevyskytovala žádná čísla až do dne, kdy plukovník Motýl donesl baťůžek plný čísel. V baťůžku je sedmička a s každým číslem tam je i číslo o 3 větší. Navíc každé číslo, které v baťůžku je, se tam dostalo tak, že se k sedmičce přičetl nějaký přirozený násobek čísla 3. Pan José si občas tato čísla půjčuje a hraje si s nimi. Vždycky si vybere dvě čísla (může i dvakrát to stejné), která už někde mají, sečte je a výsledek si schová k sobě do šuplíku. Pokud José čísla zrovna nesčítá, tak jsou tedy všechna čísla buď v šuplíku, nebo v baťůžku. Čísla, která sčítal, pak vždycky vrátí neporušená na místa, ze kterých je vzal. Jaké je největší číslo, které panu Josému nemůže projít rukami? (Tedy číslo, které nemůže mít José v šuplíku a ani ho plukovník Motýl nemá v baťůžku.)

„Jak to vypadá v mém milovaném Šanganjosechitinu?“ zajímal se pan José.

„Je to zlé,“ zachmuřil se Matěj. Pan José jen pokýval hlavou, jako kdyby ho to nepřekvapovalo.

„Co plánujete teď?“ zeptal se zamyšleně.

„Musíme zachránit Ňoumu,“ odpověděl Henry.

„A Elvíru,“ připomněla Liběnka.

„O krystalu víte?“ Ostatní kývli hlavou. Na okamžik mezi nimi zavládlo ticho. „Jdu s vámi,“ pronesl nakonec pan José. „Je to sice nebezpečné, ale mohu vám být nápomocný. Přece jen znám Šanganjosechitin lépe než vy.“

„Můžeme tedy vyrazit?“ zeptal se Matěj, když viděl, že se pan José ještě nemá k odchodu.

BRKOS Team 2021

„Jistě, jen… přátelé, mám rozpočítaný příklad, dopočítám ho a můžeme jít!“

Matěj obrátil oči v sloup. „Šanganjosechitin je v krizi, ale ten příklad nepočká,“ utrousil otráveně. Henry se ale se zájmem naklonil nad výpočty. „To je velmi zajímavý problém!“ prohlásil a posunul si brýle na nose.

„Že ano?“ rozzářily se oči panu Josému a začal Henrymu příklad vysvětlovat.

Úloha 5.2. V tomto příkladě zafixujeme následující interpretaci $\mathbb{Z}^2$:

$$\mathbb{Z}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Uvažujme libovolné zobrazení $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ splňující

$$f(\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}).$$

Dokažte, že existují prvky $x, y, z, w \in \mathbb{Z}$ takové, že $f(\binom{a}{b}) = \binom{ax+by}{az+bw}$.

„Můžeme vyrazit, přátelé,“ pronesl po určité chvíli pan José vítězoslavně.

„A kam vlastně máme jít?“ zeptala se zmateně Bubla.

„Mám pro vás dobrou zprávu,“ usmál se oslnivě pan José. „Možností, kam jít, je méně, než má tato rovnice celočíselných řešení,“ ukázal na jeden z listů papíru.

„Ehm… promiňte, ale nemá náhodou nekonečně mnoho celočíselných řešení?“ namítla Bubla.

Úloha 5.3. Zdůvodněte, proč má rovnice

$$x^3 + y^3 + z^3 + \frac{4x^2y^2}{z} + \frac{4x^2z^2}{y} + \frac{4y^2z^2}{x} + \frac{65xyz}{4} = 0$$

nekonečně mnoho celočíselných řešení.

Pan José se usmál a sebejistě pronesl: „No vidíte, pořád by to mohlo být horší.“ Po chvíli přehrabování v hromadě papírů na pracovním stole vytáhl velikou mapu Šanganjosechitinu a začal v ní ukazovat jednotlivá místa.

„Tady je parlament. V těchto místech by měl být šanganjosechitinský klenot. A toto není jisté, ale panuje podezření, že v těchto místech je věznice, kde madam Cornelie vězní opozici. Musíme se dostat ke klenotu a poté se rozhodnout, co budeme dělat dál.“

„Kudy je nejlepší se vydat? Toto vypadá jako nejkratší cesta… “ zapíchl do mapy prst Kouma.

„Tato cesta je příliš nebezpečná, vede skrz Les zapomnění, odkud se nikdy nikdo nedostal v plném zdraví. Doporučoval bych vydat se skrz Šachové pole. Tudy,“ vysvětlil pan José.

Úloha 5.4. Šachové pole je n-dimenzionální nekonečná šachovnice. Každý se v něm může přepravovat pouze v doprovodu krále. Jaký je nejmenší počet různých tahů, které krále musíme naučit, aby se dostal odkudkoli na libovolné políčko šachovnice? Jelikož se jedná o krále, tak každý tah, který ho naučíme, bude nanejvýš o jedno políčko v každém ze směrů. Formálně n-dimenzionální šachovnicí máme na mysli množinu všech uspořádaných n-tic celých čísel. Tah, který krále můžeme naučit, je libovolná n-tice, jejímiž prvky jsou pouze čísla 0, 1 nebo -1. Pokud král stojí na nějakém políčku šachovnice $(a_1, a_2, ..., a_n)$

a chce se pohnout pomocí nějakého naučeného tahu $(x_1, x_2, ..., x_n)$, tak se pohne na políčko $(a_1 + x_1, a_2 + x_2, ..., a_n + x_n)$.

Po krátké cestě teleportem se octli před bránou, u které posedával zavalitý mužík s modrou hlídačskou čepicí. Liběnka se svižným krokem vydala k bráně, kterou ale hlídač zatarasil svým mohutným tělem.

„Dál nesmíte, je to nové nařízení vlády," pronesl nesmlouvavě. Jak mluvil, knoflíčky na jeho obrovské hrudi se třásly a vypadalo to, že každou chvílí odletí.

„Snad by se tolik nestalo…" nadhodila Bubla.

„Omlouvám se, ale skutečně nemohu nikoho z vás vpustit dovnitř. Pohltily by mne plameny pekelné," vysvětlil s vážnou tváří hlídač.

Kouma nonšalantně popošel k hlídačovi a ukázal mu zlatou brož, kterou měl připnutou na klopě saka. „Skutečně by to nešlo nějak zařídit?" pronesl blahosklonně. Hlídač vykulil oči. Na broži byl maličký zlatý trojúhelník vepsaný do kružnice.

Úloha 5.A. Uvažujme kružnici o průměru 2020 a v ní vepsaný rovnoramenný trojúhelník, jehož základna má délku rovnu roku, v němž byla vydána Zlatá bula sicilská. Určete obsah tohoto trojúhelníku.

„Ta je ale krásná! Ty barvy!" pronesl unešeně mužík. „Chcete říct, že jste…?" zajíkl se.

„No jistě, jsme trojúhelníkoidisté," usmál se sebevědomě Kouma, aby zamaskoval svoji lež.

„Bratři!" rozpřáhl ruce hlídač. „A sestry, samozřejmě," dodal omluvně, když mu padnul zrak na opodál stojící Liběnku a Bublu. „No tak to naprosto mění situaci… Asi bych neměl… Ale trojúhelníkoidisté musí držet při sobě…" mumlal si pod vousy roztržitě.

„No dobrá," pronesl nakonec rozhodně. „Je to má povinnost. Pojďte!" Mužík na chvíli zaváhal a potom z kapsy vytáhl svůj odznak. „Podívejte se," pronesl pyšně. Na mužíkově odznaku byl trojúhelník, pro nějž platí tohle:

Úloha 5.B. Mějme trojúhelník ABC a jemu opsanou kružnici se středem S a poloměrem r. Určete, co musí platit pro trojúhelník ABC, aby body A, B, C, S tvořily vrcholy konvexního čtyřúhelníku (tedy určete, podmínky, při kterých tvoří body A, B, C, S konvexní čtyřúhelník, ale pokud nejsou splněny, tak netvoří).

„Král je hrozně pomalej," stěžoval si Matěj po tom, co prošli Šachovým polem. „Příště bychom se měli svézt třeba na koni."

„Pst!" obořil se na něj pan José. „Za těmito dveřmi by měl být šanganjosechitinský klenot. Musíme ho co nejrychleji vzít a utéct s ním."

Stáli před šedivou hranatou budovou. Kvůli svým ostrým rohům a mřížím v oknech působila nepřátelsky. Stála na prázdném prostranství, kde nebylo ani živáčka. Jejich kroky se hlasitě rozléhaly po celém prostoru.

U mříží stál plechový robot. Jakmile k němu přistoupili blíž, rozsvítila se mu elektrická očka a trhaným hlasem pronesl: „Prokažte se prosím průkazem zaměstnance šanganjosechiinské vlády, nebo nalezněte všechny funkce $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující následující rovnici pro všechna reálná x a y."

Úloha 5.C. Nalezněte všechny funkce $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující následující rovnici pro všechna reálná x a y:

$$f(xy) - f(x) + f(x+1) = 2x + f(1) + x^2 f(-y) + f(0).$$

Poté, co Kouma řekl správnou odpověď, se mu robot uklonil. Dveře se se skřípěním otevřely a skupinku oslnila jasná záře. Když si jejich oči přivykly na nezvyklé množství světla, uviděli, že záře vychází z nádherného kamene, který ležel na plyšovém polštářku na konci místnosti.

„To je ono!“ vykřikl přidušeně pan José.

„Kde jsou nějaké stráže?“ divil se šeptem Matěj.

„Mají tady krásnou podlahu,“ prohlásila Liběnka. „Takovou bych chtěla doma,“ dodala a se zalíbením zkoumala vzor, který dlaždice vytvářely. Podlaha byla složená z 2021 dlaždic ve tvaru jednotkových čtverců, jež byly zdobené krásnými mozaikami.

Úloha 5.D. V rovině se nachází 2021 jednotkových čtverců tak, že každá úsečka, která se v rovině nachází, je rovnoběžná s jednou z os. Dokažte, že součet velikostí ploch pokrytých právě lichým počtem čtverců je větší nebo roven jedné.

Pan José pomalu přešel na konec k místnosti až k místu, kde ležel šanganjosechitinský klenot. Tázavě se ohlédl na ostatní, kteří čekali za ním. Po krátkém zaváhání natáhl ruku a krystal sevřel v dlani. V tu chvíli se ozvala obrovská rána a místnost se zachvěla.

„Co se to stalo?“ hlesla rozcuchaná Liběnka překvapeně.

Pokračování v příští sérii.

Svá řešení uploadujte na našich stránkách:
`http://brkos.math.muni.cz/`