Zadání 4. série

ÚHLY VŠUDE, KAM SE PODÍVÁŠ

Termín odeslání: 8. 2. 2021

Upřednostňujte prosím formu elektronického zasílání svých řešení přes "Submitovátko"na našem webu.

Součástí 4. série je také studijní text, který Ti může pomoct s řešením úloh 4.1 – 4.4. Najít ho můžeš na našem webu v sekci "Zadání a řešení".

Text kurzívou není součástí úloh.

Skupinka unisono zalapala po dechu. Uprostřed místnosti totiž za řečnickým pultem stála dáma v oranžovém kostýmku.

„Přejděme tedy k bodu číslo dvacet osm," pronesla madam Cornelie. „Jedná se o návrh od pana poslance Hloupého, který navrhl, abychom umožnili vepsání kružnice do obdélníka. Dle mého názoru to ušetří spoustu času a zrušíme tak přežitky minulé a zbytečně komplikované doby. V praxi to bude vypadat takto…" Madam Cornelie si stoupla k zelené tabuli a nakreslila na ni šišatý náčrtek této kružnice:

Úloha 4.1. Je dána kružnice k se středem S a poloměrem r. Dále jsou dány různé body A, B na kružnici k takové, že $|AB| = 2|AS| = 2|BS|$. Nakonec máme bod X, který leží na kružnici k a je různý od A, B. Označme b délku kruhového oblouku příslušného středovému úhlu $\measuredangle XSB$ a $\alpha = \measuredangle XAS$. Určete poměr $\frac{|AX|}{b}$ za předpokladu, že $\alpha = cos(\alpha)$.

Po chvíli od tabule odstoupila a pronesla ke všem poslancům: „Jak vidíme na tomto příkladu, jedná se o elegantní a jednoduchou úpravu matematiky."

„Přejděme tedy k hlasování," zaznělo z reproduktorů nad jejich hlavami. „Pro… dvě stě osmdesát tři. Proti… nikdo. Zdrželi se… jeden. Prosím vás, vzbuďte někdo pana Švandazeberga, ať zahlasuje!"

Jeden z mužíků s drátěnými brýličkami dloubl loktem do svého chrápajícího společníka. Ten sebou vyděšeně trhl a zmateně se rozhlédl okolo sebe. „Hlasuj," řekl otráveně jeho soused. „Ajo," pokýval hlavou pan Švandazeberg a zmáčkl hlasovací tlačítko. Poté zívnul a znovu se pohodlně usadil do křesla.

„Výborně. Pro je tedy dvě stě osmdesát čtyři, proti nikdo a nikdo se nezdržel, zákon prohlašuji za jednomyslně schválený. Přejděme k dalšímu bodu našeho programu, kterým je-" pokračovala madam Cornelie.

„Ale to přece není možné!" skočil jí do řeči Kouma. V místnosti to zašumělo. Madam Cornelie si posunula brýle na nose a nevěřícně se zadívala na Koumu.

„Je snad někdo proti?" zeptala se tím nejnevinnějším hlasem.

„Takhle to nejde!" trval na svém Kouma. „Podívejte se třeba na tento příklad!"

Úloha 4.2. Shodné kružnice k a l se protnou v bodech A a B. Nechť C je průsečík tečny ke kružnici k v bodě B s kružnicí l. Dokažte, že $|AB| = |AC|$.

„To je jistě zajímavé, ale na to teď není čas," usmála se falešně Madam Cornelie.

„Ale-" začal Kouma, jenže Bubla, která si všimla blížících se postav těžkooděnců, ho popadla za ruku. „Koumo, teď ne. Zdrháme!"

„Chyťte je!" zaječela madam Cornelie. Skupinka vyběhla z velkých leštěných dveří šanganjosechitinského parlamentu a zamířila k vrátnici.

„Musíte mi odpovědět na moji otázku!" vykřikl vrátný, znepokojený tím, že někdo opouští budovu bez jeho povolení. Vychrlil ze sebe toto:

Úloha 4.3. Máme zadané tři kružnice k, l, m se středy K, L, M a poloměry r_1, r_2, r_3 tak, že každá dvojice spolu má vnější dotyk. Označme bod dotyku kružnic k a l jako A, l a m jako B, m a k jako C. Ukažte, že kolmice na přímku KL v bodě A, osa úhlu KLM a osa úsečky BC se protnou v jednom bodě.

„Na to teď není čas!" odsekla Bubla a protlačila se okolo něj. „Pojďte!" houkla na ostatní.

„Příště vám to řeknem, pane vrátnej, není času nazbyt! Mějte se!" zavolala za ním ještě v běhu Liběnka a jednomu z těžkooděnců zabouchla dveře před nosem.

„Tudy!" sykl Henry a zabočil do jedné z opuštěných uliček. Konečně se zdálo, že dusot těžkooděnců se na chvíli vytratil.

„Jsme v pěkné bryndě," zkonstatovala Bubla udýchaně.

„Ta ženská je úplně šílená! Nejenže chce ovládnout celý Šanganjosechitin, ale i celou matematiku! Celý svět by přestal fungovat, kdyby se jí to povedlo!" chrlil ze sebe vytočeně Kouma.

„Já vím, ale co jsi chtěl dělat? Mohli jsme dopadnout stejně jako všichni ostatní," řekla vyčítavě Bubla a sedla si na okraj chodníku.

„Já vím, ale jen si představ třeba tohle," odsekl Kouma.

Úloha 4.4. Jsou dány dvě kružnice k, k' se středy S, S', osově souměrné podle společné tětivy AB, přičemž $|SS'| < r = r'$. Dále je na kružnici k dán čtyřúhelník $ABCD$, jehož průsečík úhlopříček P leží na kružnici k' a strana AD je tečna ke kružnici k'. Dokažte rovnost $|CD| = |AP|$.

„Víš, jaké důsledky by to mělo? A co by bylo příště? Jednička prvočíslem? Svět by se zhroutil," řekl zdrceně.

„Co budeme teď dělat?" povzdechla si Liběnka.

„My jsme bez Ňoumy, hospodský bez Elvíry, pan José a krystal bůhvíkde. A do toho o nás už ta baba, ehm, madam Cornelie ví," shrnul Matěj a bezradně rozhodil rukama.

„Tss," ozvalo se najednou z podloubí, u kterého se zastavili. Skupinka se polekaně ohlédla směrem, odkud zvuk vycházel. Ve tmě se schovával drobný stařík s kloboukem na hlavě. „Nemusíte se bát, pojďte za mnou. Jestli chcete, můžu vás zavést za panem Josém," řekl.

„Kdo jste?" zeptala se nedůvěřivě Bubla.

„Plukovník Motýl, má úcta." Stařík sklapnul podpatky a s jistými obtížemi se narovnal. „Jsem válečný veterán a zapojil jsem se do odboje proti madam Cornelii. Potřebuji jen ověřit vaši totožnost, mohli byste mi prosím odpovědět na tuto otázku?"

Úloha 4.A. V rovině ρ je dán trojúhelník ABC. Popiš množinu bodů V v prostoru takových, že mají od bodů A, B, C stejnou vzdálenost (tj. $|AV| = |BV| = |CV|$).

„To je přece. . . “ řekl Henry.

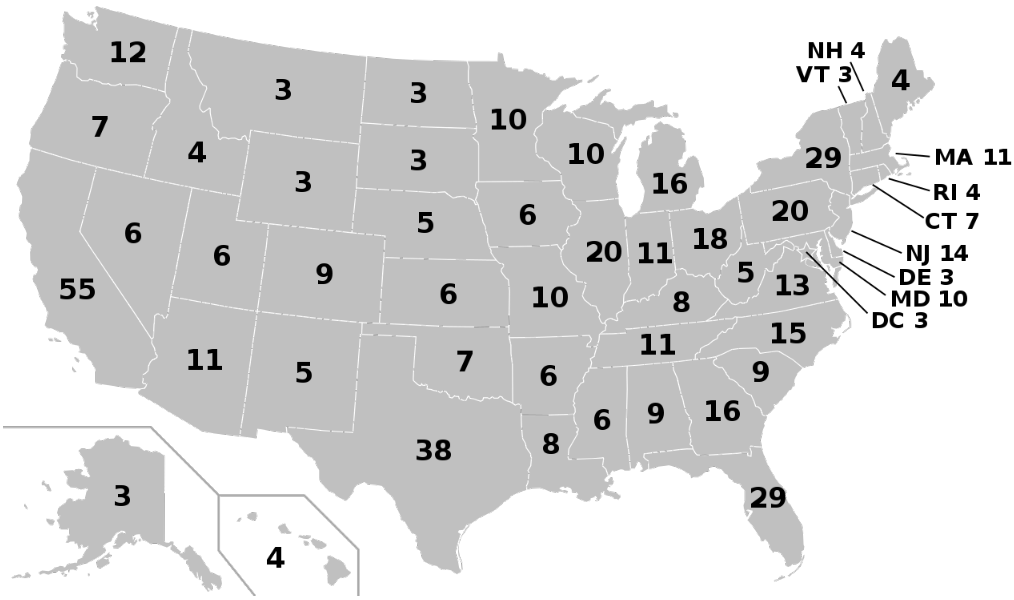
„Výborně, v pořádku. Následujte mě tedy,“ řekl plukovník Motýl a vydal se zšeřenou chodbou, která byla polepená pestrobarevnými plakáty. Na některých z nich rozpoznali madam Cornelii.

„Proč jsou všude ty plakáty?“ zajímal se Matěj. Plukovník Motýl se překvapeně otočil, jako kdyby to byla ta nejsamozřejmější věc na světě.

„Protože se přece blíží šanganjosechitinské volby.“

Úloha 4.B. Šanganjosechitinské prezidentské volby fungují podobně jako ty americké. Vyhraje ten, kdo získá alespoň 270 volitelů. Každému z 51 okresů je přiřazen určitý počet volitelů (viz mapa). Všechny volitele z okresu získá kandidát, který v daném okresu získá nejvíce hlasů. Každý volitel reprezentuje přesně milion voličů (a všichni volí).

Plukovník Motýl vidí do budoucnosti a ví, že v žádném okresu nenastane remíza (stejný počet hlasů u prvních dvou kandidátů) a že dostane přesně milion hlasů (ve všech státech dohromady). Kolik nejméně musí mít protivníků, aby mohl vyhrát volby?



„To je poměrně komplikovaný systém,“ pronesl zamyšleně Matěj.

„Vy nejste odsud, co?“ Matěj zavrtěl hlavou. „Víc vám řekne pan José, čeká na vás.“ Plukovník Motýl energicky došel na dvorek vnitrobloku, kde až na popelnice, starou otlučenou skříň a několik keřů nic nebylo. „Tak, jsme tady,“ řekl vesele.

„Tady?“ divil se Henry.

„Tohle je utajený teleport,“ kývl směrem k otlučené skříni plukovník Motýl. „Račte nastoupit. Odboj spravuje několik teleportů, které ještě nejsou kontrolované. Tímto spojem se dostanete přímo za panem Josém. Příjemnou cestu, panstvo.“

„Vy nepůjdete s námi?“ divil se Matěj.

„Ne, já mám jiné povinnosti. Ale určitě se ještě setkáme,“ mrkl na ně. „Vložíte-li do této mašinky hodnotu $\frac{x+y}{x-y}$, budete moct jít dál.“

Úloha 4.C. Kladná reálná čísla x, y, $x > y$ vyhovují rovnici

$$\frac{x^4 + y^4}{x^3y - x^2y^2 + xy^3} = 6.$$

Určete hodnotu $\frac{x+y}{x-y}$.

„Ať se vám daří, přátelé!" zavolal a za malou chvíli byl pryč. Skupinka nedůvěřivě vlezla do skříně a Henry naťukal několik čísel do displeje. Skříň se zatřásla a po malé chvíli se dveře s kovovým skřípěním otevřely.

V místnosti, která se před nimi objevila, bylo šero. Na konci stál stůl, u kterého seděla shrbená postava. Z dálky šlo slyšet nesrozumitelné mumlání. Když se přiblížili, uslyšeli postavu, která se sklání nad pracovním stolem a pro sebe si neustále opakuje: „Řešte diofantickou rovnici! Řešte diofantickou rovnici! Řešte diofantickou rovnici!"

Úloha 4.D. Řešte diofantickou rovnici $x^3 - y^3 = 11^z$ (kde x, y, z jsou celá čísla).

Liběnka popošla pár kroků a opatrně si odkašlala. „Promiňte, že vás ruším. Výsledek je…" pronesla. Postava se prudce zastavila a nevěřícně se otočila na Liběnku, která stála nejistě vedle stolu. Na okamžik zavládlo ticho. Poté se ale postava napřímila a skupinka uviděla pana Josého, jak se široce usmívá.

„To jste vy!" vykřikl radostně. „Přátelé, ani nevíte, jak moc rád vás vidím."

Pokračování v příští sérii.

Svá řešení uploadujte na našich stránkách:
`http://brkos.math.muni.cz/`