Zadání 3. série

Catalanova čísla

Termín odeslání: 11. 1. 2020

Upřednostňujte prosím formu elektronického zasílání svých řešení přes "Submitovátko"na našem webu.

Součástí 3. série je také studijní text, který Ti může pomoct s řešením úloh 3.1 – 3.4. Najít ho můžeš na na našem webu v sekci "Zadání a řešení".

Text kurzívou není součástí úloh.

„Možná bychom mohli-“ začala Bubla větu, ale už ji nedokončila. Ve dveřích hospody se totiž docela nepozorovaně objevilo malé, roztomilé selátko. Skupinka ztuhla. Hospodský nasadil kamenný výraz. Po chvíli se ale rozešel k selátku.

„Ne!“ vyjekla unisono skupinka.

„Vím, co dělám,“ odbyl je ale hospodský a pokračoval směrem k selátku. Na chvíli se na sebe se upřeně zadívali. Skupinka napjatě čekala, co se bude dít. Po chvilce však sele jen potichu zachrochtalo a zase odešlo. Matěj s Koumou si vyměnili zmatené pohledy.

„To byla Elvíra,“ vydechl hospodský, načež se hluboce rozplakal.

„Elvíra?“ divil se Matěj. Hospodský jen pokýval hlavou a začal si osušovat oči kapesníkem, který mu beze slov podal Kouma. „Děkuji. Elvíra je moje snoubenka. Ale… no, vidíte sami, jak to dopadlo,“ pronesl zdrceně.

„Jak se to stalo?“ zeptala se opatrně Bubla.

„Hráli jsme spolu zrovna naši oblíbenou hru…“

Úloha 3.1. Oblíbená hra hostinského a Elvíry vypadala takto: Elvíra se nacházela na ose přirozených čísel na čísle 1. Hostinský mezitím házel kostkou. Pokaždé když mu padlo 6, Elvíra se posunula o jedno doprava (tj. z čísla n na číslo $n+1$), když mu padlo 1, posunula se o jedno doleva, tj. z n na $n-1$ (pokud nestála na 1) a když padlo cokoliv jiného, zůstala na místě. Pokaždé, když se pohnula, hostinský si na papírek napsal + či -, podle druhu pohybu. Kolik různých posloupností znamének mohl mít hostinský na papírku, pokud hodil desetkrát a Elvíra začala i skončila na čísle 1?

„…a v tu chvíli přišla ta baba! Objevilo se nejdříve malé sele. Elvírka se za ním rozeběhla a já tomu nestačil zabránit. Proměnila se v sele stejně jako mnoho dalších lidí. Od té doby se tady občas objeví, ale nemůžeme se ani dotknout. Trhá mi to srdce,“ vyprávěl plačtivě hospodský a hlasitě se vysmrkal.

„Kdy se to stalo?“ zajímala se Liběnka.

„Zdá se to jako tolik dní, kolik existuje maximálních výrazů obsahujících 777 znaků,“ povzdechl si hospodský.

Úloha 3.2. Aritmetický výraz obsahující kulaté závorky, odčítání, dělení a čísla od 1 do 9 nazveme maximální, pokud obsahuje maximální možný počet závorek, ale neobsahuje závorky kolem samotného čísla nebo dvoje závorky kolem jedné operace. Například $(3-9)$, $((4/9)-5)$

jsou maximální, ale $3-9$, $(4/9-5)$ a $(5-(6))$ maximální nejsou. Kolik existuje maximálních výrazů obsahujících 777 znaků?

„Měli byste něco vědět.“ Hospodský ztišil hlas a obezřetně se rozhlédl okolo sebe.

„Musíte mi pomoct. Šanganjosechitin zažívá zlé časy. Madam Cornelie se rozhodla provést státní převrat.“

„Madam Cornelie?“

„Ta v oranžovém kostýmku,“ vysvětlil hospodský. „Bohužel se jí to povedlo. Náš dobrý vládce pan José se skrývá a nikdo neví, kde je. A Cornelie mění veškerou opozici na selata. Byl proti ní jednou velký protest v hlavním městě, ale všichni protestující skončili proměnění v selata. Do jednoho.“ Rozhostilo se mezi nimi ticho.

„A na tohle se rovnou vykašlete,“ ukázal hospodský směrem k teleportu, který je v poslední době nikdy nedonesl na správné místo. „Teleportační pole je kontrolováno tajnou policií a v Šanganjosechitinu se nyní nemůžete teleportovat ničím mimo státního teleportačního dopravce.“

„Jak fungují teleportační spojení v Šanganjosechitinu?“ zajímal se Henry.

„Všechny stanice leží na centrální lince v pravidelných rozestupech. Nakreslím vám to.“

Úloha 3.3. Hostinský nakreslil na papír N stanic (bodů) na centrální lince (přímce) s pravidelnými rozestupy 1. Následně do obrázku dokreslil několik úseček (bod není úsečka) tak, že každá začíná a končí v některých vyznačených bodech. Navíc pro každé dvě úsečky a, b platilo, že pokud je jejich průnik nějaká úsečka c, pak $a = c$ nebo $b = c$. Kolika způsoby mohl hostinský nakreslit úsečky v závislosti na N, pokud navíc víte, že jich nakreslil největší možný počet pro dané N?

„A je vůbec nějaká možnost, jak Šanganjosechitin zachránit?“ zeptala se Bubla.

„Co vím, tak ochranu vám zajistí pouze Šanganjosechitinský klenot – ten, kdo ho má, se nemůže proměnit ve zvíře,“ pronesl zamyšleně hostinský. „A je to také zatím jediná naděje, která by mohla vrátit zpět naše milované,“ povzdechl si.

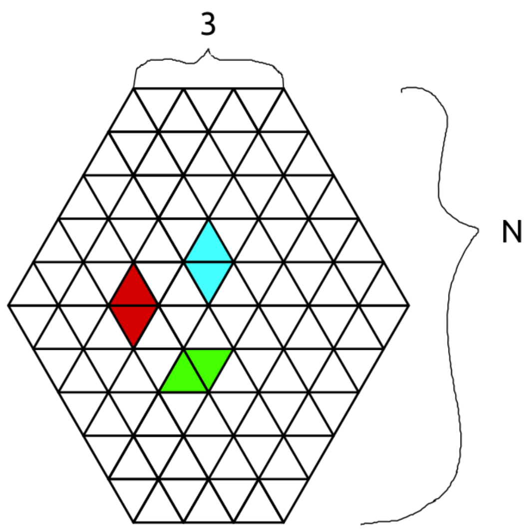
„Kde ho můžeme najít?“ zajímala se Bubla.

„Nachází se v budově parlamentu Šanganjosechitinu. Je ale nesmírně těžké se k němu dostat. Kdyby se vám to ale povedlo, zachránili byste mnoho životů.“

„A jak vypadá?“

„Je to ten nejkrásnější krystal, jaký kdy svět viděl.“

Úloha 3.4. Krystal je trojúhelníková mřížka jako na obrázku, kde nezávisle na jeho výšce N má horní a spodní strana délku 3. Krystal je vyplněn barevnými jadérky ve tvaru kosočtverců o velikosti dvou trojúhelníků. Jadérka mají tři různé barvy. Každý trojúhelník je součástí právě jednoho jadérka. Navíc každá dvě jadérka, která spolu sdílí hranu, mají stejnou barvu, právě když mají stejnou orientaci (tj. jejich hroty míří stejným směrem). Monokrystalem pak označíme libovolnou souvislou plochu jadérek stejné barvy, která již nesousedí s dalšími jadérky této barvy. Kolik různých tvarů a umístění může mít monokrystal o výšce N v krystalu o výšce N?



„Tak my jdeme," řekl rozhodným hlasem Matěj a zvedl se k odchodu. „Nesmíme ztrácet čas."

„Dál se nedostanete," zahradil jim cestu zavalitý mužík. Bubla se už už rozčileně nadechovala, aby se ohradila, ale Kouma ji rychle chytl za ruku. Všimnul si totiž docela malinké brože na mužíkově saku a něco ho napadlo.

„Trojúhelníkoidisté by měli držet při sobě, ne?" prohodil rádoby nonšalantním tónem a kývnul směrem k drobnému zlatému trojúhlníkoidu, který zdobil mužíkovu hruď.

„Chcete říct. . . ?" začal mužík a nedůvěřivě si Koumu přeměřil.

„Že přece vím, že podstata světa leží v trojúhelníkoidech!" vyhrkl Kouma rychle. Zavalitý mužík se zarazil. „To myslíte vážně?" Kouma začal horlivě přikyvovat.

„A jak vám mám věřit?" zvedl mužík nedůvěřivě obočí.

„O trojúhelníkoidech vím vše!"

„A vyznáte se i v trojúhelnících?"

„Jistě."

„Tak se ukažte," odfrkl si mužík a podal jim náčrtek tohoto trojúhelníku:

Úloha 3.A. Nechť ABC je trojúhelník s ostrým úhlem u vrcholu A. Zvolme na straně AC bod X a veďme jím přímku p, která bude kolmá na přímku AB. Průsečík p a AB označme P. Na přímce AB uvažme bod Y takový, že $|\sphericalangle CXY| = 2\alpha$. Nakonec uvažme Fofovu (Thaletovu) kružnici k nad průměrem XP. Přímky AC a XY protínají k po řadě v bodech M, N různých od X. Dokažte, že MN je rovnoběžná s AB.

„No vida," pokýval uznale hlavou mužík a uvolnil jim cestu. Skupinka nechala hospodu U Tří funkcí za zády a vydala se směrem k nádraží. Na oprýskaném nádražíčku bylo asi pět omlácených budek, na nichž šlo přečíst oloupaný nápis „Teleportační stanice". Jeden po druhém se do budky namáčkli a Liběnka se sklonila nad maličký displej s číselníkem.

„Vážení cestující, děkujeme vám, že jste se rozhodli pro své cesty využít Šanganjosechitinské dráhy," ozval se plechový hlas. „Chcete-li využít našich služeb, musíte nejdříve vložit vaši odpověď na následující příklad."

Úloha 3.B. Nechť n je přirozené číslo. Ukažte, že rovnice $x^2 - y^2 = n$ má celočíselná řešení x, y, právě když n nedává po dělení čtyřmi zbytek 2.

„Vážení cestující, omlouváme se za zpoždění teleportu," ozval se přerušovaný hlas nádražního rozhlasu. „Teleport číslo 322 společnosti Šanganjosechitinské dráhy bude opožděn zhruba o šedesát minut. Upozorňujme cestující, že doba zpoždění se může změnit."

„Ani teleporty nejezdí podle jízdních řádů," zaúpěla Liběnka.

„Přejeme vám příjemnou cestu," ozval se plechový hlas znovu.

Po nějaké době rachotání a kymácení se budka otevřela a jim se naskytl pohled na moderně vypadající areál.

„Promiň, Henry. Už nikdy nebudu urážet tvůj teleport," pronesla tiše pobledlá Liběnka. „Oproti tomuhle krámu to je luxus."

„To je ono?" zeptal se Matěj a ukázal prstem před sebe. Henry nahlédnul do plánku, který jim nakreslil hospodský a pokýval hlavou.

„Poněkud zvláštní stavba…"

Úloha 3.C. Parlament v Šanganjosechitinu má tvar dvacetistěnu, který je pokrytý poslanci, na každém trojúhelníku jeden (gravitační pole uvažujme centrální, do středu). Zazněl pokyn "Kdo je pro, ať zvedne ruku", ale nikdo neslyšel otázku, a tak každý poslanec zvedne ruku právě tehdy, když většina jeho sousedů (tzn. alespoň dva ze tří) mají ruku nahoře, přičemž na začátku mají všichni ruku dole. Kolik nejméně poslanců musíme nahradit agenty se zvednutou rukou, abychom způsobili, že zvednou ruku nakonec všichni?

Skupinka se rozešla směrem k mohutným dveřím, u kterých poklimbával vrátný. Bubla natáhla ruku po klice, ale v tu chvíli se vrátný trhnutím probudil a nesouhlasně zakroutil hlavou.

„Pokud se chcete dostat dovnitř, musíte mi odpovědět na moji otázku!"

Úloha 3.D. Uvažujme množinu $\mathbb{Z}[x_1, ..., x_n]$ polynomů v n proměnných s celočíselnými koeficienty. Dále uvažujme množinu $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, ..., m-1\}$. Zjistěte, kolik existuje zobrazení $D : \mathbb{Z}[x_1, ..., x_n] \to \mathbb{Z}_m$ splňujících

$$D(f + g) \equiv D(f) + D(g) \pmod{m},$$

$$D(fg) \equiv f(1, ..., 1)D(g) + g(1, ..., 1)D(f) \pmod{m}.$$

(Výraz $f(1, .., 1)$ tedy znamená, že do polynomu f dosadíme n jedniček.)

Bubla se zamyslela a po chvíli řekla správnou odpověď. „No tak pojďte. Ale hlavně potichu!" sykl vrátný. Opřel se do těžkých dveří a rázem se ocitli v šanganjosechitinském parlamentu. Na výjev, který se před nimi naskytl, však nikdo nebyl připraven. Skupinka unisono zalapala po dechu. Uprostřed místnosti totiž za řečnickým pultem stála dáma v oranžovém kostýmku.

Pokračování v příští sérii.

Svá řešení uploadujte na našich stránkách:
`http://brkos.math.muni.cz/`

BRKOS Team 2020