Zadání 2. série

Funkcionální rovnice

Termín odeslání: 30. 11. 2020

Vzhledem k epidemiologické situaci prosím upřednostňujte formu elektronického zasílání svých řešení přes "Submitovátko"na našem webu.

Součástí 2. série je také studijní text, který Ti může pomoct s řešením úloh 2.1–2.4. Najít ho můžeš na na našem webu v sekci "Zadání a řešení".

Text kurzívou není součástí úloh. Pokud odesíláš své první řešení, nezapomeň se prosím před jeho odesláním zaregistrovat na našich webových stránkách `http://brkos.math.muni.cz/`.

„Proboha,“ zalapala po dechu Liběnka, „tak tohle myslel pan José tím dopisem.“ V místech, kde jen před malou chvilkou stál Ňouma s jedním ze selátek, byla selátka dvě. A vedle nich se válela hromádka oblečení, ve kterém toho dne byl Ňouma. Zoufalé zakvičení se ozvalo znovu.

„Ňoumo!“ rozeběhla se za selátkem Bubla.

„Zbláznila ses?!“ popadl ji rozzlobeně Henry za ruku. „Vždyť je to nakažlivé! Nesmíš se ho dotknout!“

„Ale přece mu musíme nějak pomoct!“

„Za to může ta baba. Kde je?!“ obořil se rozzlobeně Kouma na dámu, která stále postávala opodál a naprosto nevzrušeně tyčkou ukazovala na jednotlivé překážky, jimiž selátka čile proskakovala.

„Možná bych vám mohla pomoct,“ natáhla dáma sladce hlas, „pokud ovšem dokážete získat číslo, které bude mít náš nový člen týmu.“

Úloha 2.1. Dáma vyměňuje celá čísla podle určitých pravidel. Zjistili, že ať si Kouma vybere jakékoliv celé číslo k a Bubla jakékoli celé číslo n, dáma jim je vymění za celá čísla k' a n' taková, že když je pak sečtou, získají stejný výsledek, jako kdyby je nejprve sečetli a součet $k + n$ pak u dámy vyměnili. Co nám dáma vrátí, když jí dáme číslo 0?

„To číslo je. . . “ prohlásila Bubla a vítězoslavně se otočila na dámu.

„No dobře,“ našpulila rty dáma, „tohle je vaše nápověda!“ A cosi načmárala na kus papíru. Nato se rázně otočila a afektovaně zvolala: „Jdeme!“

Zvedla ještě prst a namířila ho směrem, kde ještě pořád stál Ňouma proměněný v sele. „A tebe se to týká taky.“ Zvonečky na zavalitých krčcích selat se opět rozezvonily, ale po chvilce ztichly v dálce.

Kouma nevěřícně zíral na kus papíru, který mu dáma dala, a celá skupinka zůstala potichu. Na papíře bylo načmáráno zelenou tužkou toto:

Úloha 2.2. Které funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňují

$$f(x^2 + y^2) = f(x)y + f(y)x$$

pro všechna reálná x, y?

Po chvíli na stejný kus papíru napsal řešení a zmateně se podíval po ostatních.

„Co s tím máme jako dělat?“

„Nemůže to být nějaká šifra?“

„Třeba jsou v tom zašifrované souřadnice.“

„Nebo telefonní číslo na nějakého finalistu superstar?“ Všichni se překvapeně podívali na Liběnku, která se začervenala a sklopila oči. „Pardon.“

„Vždyť ani nevíme, jak se ta ženská jmenuje!“ rozčiloval se Kouma.

„Co kdybychom si dali něco na pití?“ navrhl Matěj a ukázal směrem k ceduli, která hlásala Hospoda U Tří funkcí.

„To je dobrý nápad, odpočineme si a třeba nás něco napadne,“ souhlasil Henry.

U vchodu však stál statný chlapík a nesouhlasně se postavil před dveře. „Pokud chcete dovnitř, musíte uvést vaši národnost, vaše tři nejoblíbenější prvočísla a vyřešit jednu funkcionální rovnici.“

Funkcionální rovnice, kterou potřebovali vyřešit, byla tato:

Úloha 2.3. Určete všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující

$$f(x + f(y)) = x^2 + f(y^2) + 2xf(y)$$

pro všechna reálná x, y.

„Ach ta byrokracie,“ povzdechl si Henry a otevřel dveře. Octli se rázem v jiném světě. U vchodu hrálo několik staříků karty, hospodský znuděně utíral špinavou sklenici a na baru poklimbávalo pár štamgastů. Jinak to ale v hospodě bzučelo jako v úle a skupinka s obtížemi našla volný stůl.

„Přejete si?“ přispěchal hospodský s bločkem v ruce. O chvíli později se vrátil s podnosem plným sklenic. „Prosím, prosím, tu máte… A tady pro krásné dámy… “ spiklenecky mrknul na Bublu s Liběnkou a postavil před ně vysoké sklenice po okraj naplněných žlutou limonádou.¨

„On s váma snad laškuje!“ rozzlobeně zakroutil hlavou Matěj, když hospodský odešel.

„Ale prosím tě.“

„Byl jenom milej.“

„Na mě by víc zapůsobilo, kdyby uměl taky něco spočítat.“

„Nebo kdyby nám řekl, co znamená ten lístek, co nám dala ta ženská.“

„No dovolte,“ otočil se hostinský, který rozhovor zaslechl, „vy jste si asi nevšimli, jak se tento podnik jmenuje.“ Odkudsi vytáhl bílou tabuli a demonstrativně na ní začal počítat.

Úloha 2.4. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že splňují následující rovnost pro všechna reálná x a y:

$$f(f(x) + y) + f(y) = x + 2f(f(y)).$$

Od vedlejšího stolu se z ničeho nic ozval křik. Hostinský zrovna dopočítal příklad a s odfrknutím položil fixu na stůl. Poté se otočil směrem, odkud hluk vycházel a jenom otráveně prohodil: „Pánové, už zase?“

„Nejsme jenom pánové,“ ozvala se jedna z přítomných dam. „A tady ti hloupí kostičkáři už opravdu neví, co by vymysleli!“

„Kostičkáři?! Beru to jako hlubokou urážku, my jsme kubicisté!“ ohradila se jiná dáma.

„To je mi úplně jedno!“ Uraženě se zvedla a vyštěkla na překvapeného Matěje:

Úloha 2.A. „Kolik existuje dělitelů čísla 81 000, kteří jsou dělitelní číslem 100?“

„Toho si nevšímejte, dělitelisté to nemají v hlavě v pořádku,“ uklidňoval Matěje mužík u vedlejšího stolu.

„A vy jste kdo?“ zeptal se trochu nejistě Matěj.

„My,“ pronesl důležitě a upravil si sako, „jsme kubicisté.“

„Co to znamená?“

„No přece víme, jaká je podstata světa.“

„A to je. . . ?“

„Alfa omega, chlapče! Je vidět, že jsi ještě mladý.“

Úloha 2.B. Sekta Kubicistů věří, že podstata světa je ukryta ve dvou kostkách α a ω o stejné délce hrany, které mají na jedné stěně vyrytou šipku. Na počátku světa se touto stěnou dotýkaly tak, že šipky ukazovaly stejným směrem. V průběhu dění α zůstává stabilně na místě a ω se po ní ze všech stran koulí: vždy se překlopí přes nějakou hranu. Konec světa pak nastane, až se ω bude opět dotýkat α šipkou na šipku, ale šipky nebudou směřovat stejným směrem. Dokažte, že šipka opravdu vždy dolehne opět na šipku (tzn. stěna se šipkou jedné kostky se nikdy nepotká se stěnou bez šipky druhé kostky), ale že konec světa nastat nemůže, tzn. šipky při dotyku budou směřovat vždy stejným směrem.

„Dovolil bych si s vámi nesouhlasit, vážený pane,“ ozval se jiný muž, který měl na hlavě vysoký modrý klobouk a pokuřoval dýmku. „Každý přece ví, že podstata světa je ukryta v trojúhelníkoidech.“

„Trojúhelníkoidech?“ podivila se Bubla.

„No samozřejmě! Vy nevíte, co jsou to trojúhelníkoidy?“ podivil se ještě více muž v klobouku.

Úloha 2.C. Definujme trojúhelníkoid jako ostroúhlý trojúhelník, který má ke každé straně přilepený půlkruh (s touto stranou jakožto průměrem). Uvažujme dva shodné protínající se trojúhelníkoidy se stranami délek a, b, c. Jaké je nejmenší S takové, že pokud je obsah jejich průniku (v závislosti na délkách stran) větší než S, můžeme s určitostí říct, že se protínají i vnitřní trojúhelníky trojúhelníkoidů?

„Vy nejste odsud, že?“ poznamenal suše hospodský. Liběnka, Bubla, Matěj, Henry i Kouma zakroutili hlavami.

„To jde vidět. Víte, v Šanganjosechitinu jsou velmi populární tyto tři sekty. Dělitelisti, kubicisti a trojúhelníkoidisti. Většinou se hašteří o tom, co je podstata světa, ale jinak se mají docela rádi.“

Úloha 2.D. Sekty dělitelistů, kubicistů i trojúhelníkoidistů mají n členů. Každý z těchto $3n$ členů má ve zbývajících sektách právě $n+1$ kamarádů. Přátelství je vzájemné. Dokažte, že existuje skupina tří členů taková, že každý pochází z jiné sekty a všichni jsou navzájem kamarádi.

Nad Šanganjosechitinem dávno zapadlo slunce a u stolu zavládla sklíčená atmosféra. Ňouma mezi nimi chyběl a nikomu nebylo moc do řeči. Trojúhelníkoidisti se ještě pořád hádali s kubicisty a kubicisti se nepřestali hádat s dělitelisty, ale skupinka u stolu je přestala vnímat.

„Co budeme dělat?“ zeptal se Henry a unaveně si promnul oči.

„Měli bychom jet za panem Josém. Ten nám řekne víc,“ prohlásila Liběnka.

„Možná bychom mohli-“ začala větu Bubla, ale už ji nedokončila. Ve dveřích hospody se totiž docela nepozorovaně objevilo malé, roztomilé selátko.

Pokračování v příští sérii.

Svá řešení uploadujte na našich stránkách:
`http://brkos.math.muni.cz/`