Zadání 1. série

Úvodní guláš

Termín odeslání: 19. 10. 2020

Text kurzívou není součástí úloh.

V Hloupětíně pršelo. Z domku u lesa se kouřilo a zevnitř se ozývaly veselé výkřiky. Bubla totiž zrovna přinesla balíček plný karamelových bonbónů a spustila tím sérii všech možných reakcí.

„Dáte si?“

„No jasně!“ přiběhl Ňouma a v těsném závěsu za ním i Kouma.

„Necpi se,“ žduchnul do Ňoumy.

„Já je nechci, lezou moc za zuby,“ prohlásila Bubla.

„Já je nerad,“ zkřivil obličej Matěj.

„A to já si dám,“ opáčila Liběnka, „Henry, nechceš taky?“ Otočila se na shrbeného Henryho, který ani nezdvihnul oči od papírů, které měl před sebou rozložené, a jen zakroutil hlavou.

„Ale já tady byl první, takže bych jich měl dostat nejvíc,“ prohlásil Ňouma.

„Ne, ne, já chci stejně jako ty!“ ohradil se Kouma.

„Nebuď hamižnej!“ obořila se na něj Liběnka. Bublu mezitím však něco napadlo a začala rozdávat bonbóny.

Úloha 1.1. Bubla přede všemi rozdělovala karamelové bonbóny mezi Ňoumu, Koumu a Liběnku. Některé z karamelek však ještě rozdala skrytě, aby vyhověla tajným přáním a požadavkům svých přátel. Například, když dala několik karamelek někomu jinému než Ňoumovi, ten pak chtěl tajně dostat dvojnásobek tohoto počtu. Kouma, pokud viděl veřejné obdarování někoho jiného než sebe, si nárokoval skryté předání pouze stejného počtu. Liběnce bylo všechno jedno a nenárokovala si tajně nikdy nic.

Bubla ovšem chvíli před rozdáváním vypila pár sklenek vína a byla ve vcelku rozverné náladě. Proto při veřejném rozdávání karamelek tu a tam někomu pár bonbonů zase sebrala a při dodatečném tajném odebírání jim brala podle stejných pravidel, jako rozdávala.

Jak může Bubla dosáhnout toho, aby měli ostatní každý právě 10 karamelek, má-li jich přesně 30? Žádný ze 4 účastníků předávek samozřejmě nikdy nemůže mít záporný počet karamelek.

Příklad: Bubla dá veřejně 3 karamelky Liběnce, musí tedy skrytě předat další 3 Koumovi a 6 Ňoumovi. Následně odebere 1 Koumovi a musí proto navíc odebrat i 2 Ňoumovi.

„Ještě že jsi to udělala takhle, Bublo, já bych jich asi víc sníst ani nezvládl,“ smál se Ňouma po tom, co Bubla rozdala všechny bonbóny a on do sebe hodil poslední karamelku.

„Já bych si něco zahrál, aby nám vytrávilo,“ navrhl Kouma a otočil se na Liběnku.

„Liběnko, přidáš se?“

„Ne, já si radši na chvíli odpočinu," prohlásila karamelkami znavená Liběnka. Henry se mezitím pořád mračil do listu papíru, který držel v ruce.

„Co to je?" zajímala se Bubla.

„Přišlo to dneska ráno z Šanganjosechitinu, podívej." Henry se tvářil ustaraně. Kouma s Ňoumou mezitím začali hrát pantomimu a o Bublu s Henrym se moc nezajímali. Po chvíli je ale klasická pantomima přestala bavit, a proto se rozhodli si trošku upravit pravidla.

Úloha 1.2. Kouma a Ňouma hráli pantomimickou hru. Kouma předvedl číslo 1, Ňouma číslo n. Pak opakovaně měnili své číslo vždy na jiného dělitele čísla n tak, že číslo, které předváděli, vynásobili nebo vydělili nějakým prvočinitelem čísla n. Toto prováděli zaráz. Pro která n se může stát, že v jednu chvíli předvádí stejné číslo?

Ňouma se zrovna s Koumou hádal o tom, že jeho provedení písmene n bylo mnohem hezčí než Koumovo a že by měl dostat bod navíc. Zamyšlený Henry se pořád ještě mračil na příchozí dopis a jejich dohadováním byl otrávený.

„Můžete být laskavě chvíli potichu?" zabručel.

„Co tam máš tak důležitého, že se ani neusměješ?" zajímal se Kouma.

„Prospělo by ti si s námi něco zahrát. Třeba by ses netvářil pořád tak kysele," přidal se Ňouma.

„Nebo třeba pouštět draky, koukej, už neprší."

„To je pravda, fouká dokonce vítr. Uděláme si nějakého?"

„Tady jich ještě spousta zbylo," zamyslela se Liběnka a odkudsi donesla krabici plnou papírových draků.

„A draci mají tvar krááásných deltoidů, to by se ti mohlo líbit."

Úloha 1.3. Dokažte, že čtyřúhelník $ABCD$ je deltoid právě tehdy, když $ABCD$ je tečnový čtyřúhelník a zároveň jeho úhlopříčky AC a BD jsou na sebe kolmé.

Henry jim ale jen mlčky podal dopis, který držel v ruce. Liběnka se pro něj natáhla a začala číst nahlas.

„Drazí přátelé," stálo tam, „prosím vás o urychlenou pomoc. Šanganjosechitin je v nouzi. Bohužel nemohu v dopise napsat víc, vše vám sdělím osobně. Prosím, okamžitě jakmile to bude možné, přijeďte. S úctou, José. P. S. Nehlaďte malá roztomilá zvířátka."

„To je dost divný dopis," ozval se Matěj, který byl do té doby potichu a do rozhovoru se nezapojoval. „Co to má znamenat, nehlaďte zvířátka?"

V hlavě se jim všem vynořily vzpomínky na poslední návštěvu Šanganjosechitinu a v místnosti zavládlo ticho. Ňouma nervózně zašoupal nohama. „Mohlo by to být nebezpečný."

„Co by na tom mohlo být asi tak nebezpečnýho?" vysmál se mu Kouma.

„Úplně cokoliv," pokrčil rameny.

„Bojíš se, že tě třeba nějaké malinké zvířátko sežere?" dobíral si ho dál Kouma.

„Ty jsi tupej!"

„Ty víc!"

„Ty jsi tupej, jak úhly v tomhle čtyřúhelníku!"

Úloha 1.4. Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník takový, že úhly ABC a BCD jsou tupé. Označme P průsečík přímek AB a CD. Označme k kružnici opsanou trojúhelníku APD. Nechť E, F jsou takové body na k, že body E, B, C, F leží na jedné přímce v tomto pořadí. A nakonec označme G průsečík přímky AB s osou úhlu BEA a H průsečík přímky CD s osou úhlu CFD. Ukažte, že body E, F, G a H leží na jedné kružnici.

„Vy se prostě dneska musíte pořád hádat,“ postěžovala si Bubla.

„Já se nehádám, to on se hádá.“ Kouma už se nadechoval s odpovědí, ale Matěj je rychle přerušil. „Pojedeme tam?“

„Měli bychom,“ řekla po chvilce přemýšlení Bubla a ostatní začali přikyvovat.

„Můžeme alespoň k cestování využít náš teleport,“ prohlásil Henry.

„A bude to fungovat?“ zvedl obočí Matěj.

„Měl by. Udělal jsem nějaké úpravy.“

„A jak to teda funguje?“

„Nyní by měla stačit zadat jen trojice prvočísel.“

„Potřebuju se jenom sbalit,“ prohlásila Liběnka, „mezitím to můžete nachystat.“

Liběnka rychle odkráčela a ostatní se sklonili nad přístrojem. Kódem nutným k použití teleportu byla jedna z těchto trojic čísel:

Úloha 1.A. Najděte všechny trojice prvočísel p, q, r vyhovující rovnosti $\frac{7}{p} + \frac{11}{q} + \frac{13}{r} = 10$.

„Připraveni?“ zeptal se Henry a zhluboka se nadechnul. Pevně zavřel oči a zmáčknul knoflík. Objevil se záblesk a všemi v místnosti to trhnulo. Za malou chvíli se octli na čemsi, co vypadalo jako nějaké hřiště pro psy.

„Jsme někde úplně jinde, než jsme měli být,“ zkonstatoval Matěj.

„Nepovídej,“ odsekl rozladěný Henry a sklonil se nad teleportem.

„Tak tohle bylo naposledy, co jsem tímhle cestovala,“ řekla uraženě Liběnka a kontrolovala si koleno, ze kterého jí tekla krev, „nikdy to ještě nefungovalo tak, jak má.“

„Nějak se to rozpadlo,“ povzdechl si Henry a zvedl jeden z několika kusů pláště stroje.

„Jak to patří? Nechybí tomu něco?“ snažila se Bubla. Henry se zamyšleně poškrábal po hlavě a sebral pět kusů z vrchní části stroje.

Úloha 1.B. Rozhodněte, zda lze pokrýt obdélník 5×4 všemi pěti různými (neshodnými) tetrominy (souvislé objekty sestávající ze čtyř jednotkových čtverců).

„Co je zase tohle?“ vyprskl smíchy Kouma. Dáma stojící poblíž se na něj nechápavě otočila.

„Co by bylo? Za malou chvilku začíná turnaj a my nesmíme promarnit ani chvilku, kterou bychom mohli využít k přípravě.“

„Jakého turnaje?“ nechápal Matěj.

„Přece v prasečích agility,“ opáčila dáma tónem, který naznačoval, že to je ta nejsamozřejmější věc na světě.

Úloha 1.C. Prasečí agility se hodnotí na základě času, za který dané sele proběhne překážkovou dráhou. Soupeří proti sobě vždy dvojice. Posledního turnaje se účastnila alespoň 3 selata. Každé soupeří s každým (jiným) právě jednou a víme, že každé sele nakonec alespoň jednou vyhrálo (remízy nebyly). Dokažte, že existuje trojice selat A, B, C taková, že A vyhrál nad B, B nad C a C nad A.

Selátka zmateně pobíhala a zvonky na jejich krčcích vydávaly ohlušující zvuk.

„A to tady děláte běžně…?“ zeptala se opatrně Liběnka.

„Prasečí agility mají v Šanganjosechitinu velkou tradici-“ začala trochu uraženě dáma.

„Počkejte, my jsme v Šanganjosechitinu?“ skočil jí do řeči Henry.

„No, samozřejmě,“ zarazila se trošku, „tedy na jeho okraji.“ Henry se rozzářil a rozběhl se k teleportu. „Pojďte sem, už vím, v čem byla chyba.“ Vzal kompas, mapu a poznámkový blok a něco do něj začal rychle škrábat. Jednou z věcí, které do bloku načmáral, byl důkaz této nerovnosti:

Úloha 1.D. Nechť x, y jsou reálná čísla větší než 1. Ukažte, že

$$\frac{x^3y}{\sqrt{y^2-1}} + \frac{xy^3}{\sqrt{x^2-1}} \geq \frac{4x^2y^2}{x+y}.$$

Ňouma mezitím šel za selátky a jedno vzal do náručí. „Ta jsou ale roztomilá… jestlipak bys umělo vyklepávat prvočísla?“ zkoumavě na něj pohlédl.

Henry už všechny svolal, odhodlán dokázat funkčnost svého vynálezu. „Byla to jen malá odchylka. Nezadali jsme přesné souřadnice, kam do Šanganjosechitinu jsme chtěli dojet,“ vysvětloval rychle.

„Ňoumo, čekáme už jen na tebe,“ povzdechl si Matěj a otočil se na Ňoumu. „Ňoumo, mohl bys jít za námi?“ Odpověď nepřišla. „Co je to s tebou?“

„Ňoumo?!“ Odpovědí jim bylo žalostné zakvičení. Všichni se nevěřícně podívali směrem, odkud zakvičení vycházelo.

„Proboha,“ zalapala po dechu Liběnka, „tak tohle myslel pan José tím dopisem.“

Pokračování v příští sérii.

Svá řešení uploadujte na našich stránkách:
`http://brkos.math.muni.cz/`