Zadání 6. série

Velké věty

Termín odeslání: 4. 5. 2020

Text kurzívou není součástí úloh.
Varování! Úlohy tematické části byly vymyšleny tak, že jejich řešení může využívat opravdu netriviální matematické poznatky a nejspíš by některé z nich byly před 30 lety neřešitelné. Proto vřele doporučujeme předchozí nastudování pomocného textu :)

„Tak nashlezanou," povzdechl si Zrzoun, jakmile uviděl stvoření cupitající na vysokých podpatcích.

„Vy s námi nejdete za panem Chitinem?" divil se Matěj.

„My… my radši důstaneme tady," vykoktal Drzoun.

„Bude to tak lepší-"

„Pro nás,"

„…i pro vás!"

„A pro planetu,"

„A pro lední medvědy,"

„A tak celkově…"

„No tak se mějte!" a s prásknutím dveří oba zmizeli. Skupinka se po sobě nechápavě podívala, ale dřív než stihli cokoliv říct, se ozval vysoký hlas asistentky pana Chitina. „To je opravdu pech, já nechápu, proč tady musí být pořád tolik hloupých kódů! Jeden by se z toho zbláznil! Tady někde jsem měla lísteček, na kterém byl napsaný, ale je fuč! Neuměli byste si s tím poradit vy…?" rozhodila dopáleně rukama a ukazovala na další dveře, na kterých byla destička s klávesnicí pro zadání kódu.

„Ale jo," natáhla se Liběnka a začetla se do instrukcí pro otevírání dveří. K zjištění kódu, který otevíral těžké leštěné dveře, bylo třeba vyřešit tuto rovnici:

Úloha 6.1. Vyřešte rovnici $a^4 - 8^b = 16$ v oboru přirozených čísel.

„Můžete mi ale nejdřív říct, co se to tady děje?" zamračil se Matěj. „Proč Zrzoun a Drzoun nechtěli jít za panem Chitinem?" Situace se mu vůbec nelíbila a zamračeně hleděl na slečnu Isabelu, která sklopila hlavu a začala kontrolovat svůj lak na nehtech. Nejprve zbledla i přes silné nánosy líčidel, poté zrudla a začala ladit s jejími červenými šaty a nakonec hlesla: „To uvidíte sami. Pojďte dál."

Dveře se otevřely a naskytl se jim pohled do moderně zařízené pracovny. Místnost byla vybavena několika kusy designového nábytku, na stěnách viselo několik abstraktních obrazů a jedna celá stěna byla prosklená a byl z ní krásný výhled na město. Uprostřed místnosti stál obrovský stůl s křeslem, na němž seděla mohutná shrbená postava.

„Tak jste tady," promluvil na ně chraplavý hlas a muž za stolem vycenil své žluté zuby. Všem bylo rázem jasné, že mají tu čest se samotným panem Chitinem.

BRKOS Team 2020

„My jsme… no… přišli jsme… víte…“ začal ze sebe vykoktávat Kouma, ale pan Chitin ho rázně zastavil. „Vím, kdo jste i proč jste přišli. Tak mi to ukažte.“ Kouma opatrně vzal trošku polámané kousky přístroje a postavil ho na stůl pana Chitina.

„Musíte být velice opatrný při manipulaci s ním, měli jsme s ním malou nehodu a taky jsme ho ještě pořádně netestovali…“ snažil se ještě vysvětlovat Kouma.

„Nezajímají mě vaše rady,“ odseknul pan Chitin rázně a zapnul přístroj. „Teď se stanu konečně nejmocnějším člověkem na světě! A vás za chvíli nikdo znát nebude…“ děsivě se zasmál a na papíře začal počítat rovnici, kterou po něm přístroj požadoval k přemístění se.

Úloha 6.2. Rovnice na přístroji vypadala takto: Nechť $k, l \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že rovnice $x^2 - 2k^2x - l^4 = 0$ má nezáporné celočíselné řešení a. Ukažte, že $a - k^2$ není druhá mocnina žádného celého čísla.

Ozvalo se bzučení stroje, který po chvíli jasně zazářil a… pan Chitin zmizel. V místnosti na okamžik zavládlo ticho. Matěj opatrně nahlédl na výpočty, které se povalovaly na stole a po chvíli se hlasitě rozesmál.

„On to spočítal špatně!“

„Cože?“

„Stroj funguje tak, že jakmile zadáte příslušný kód, ocitnete se kdekoliv na světě,“ vysvětloval Matěj. „Ale po té naší nehodě se systém kódů trochu posunul. Tedy drahý pan Chitin skončil dosti pravděpodobně někde v brazilských pralesech.“

Slečna Isabela přicupitala a opatrně se zeptala: „Už je ten syčák pryč?“ Ostatní přikývli. „Díky Bohu! To to dopadlo nejlépe, jak mohlo! Je tady ale ještě jedna věc, která se musí vyřešit… mohli byste mi prosím pomoct?“ drmolila a začala složitě natáčet zařízení, které viselo na zdi.

„Říkal něco o třetinách. Páky posunout o třetinu, říkal,“ mumlala si pro sebe a otáčela jednotlivými pákami. „Je to ale vůbec možné?“ zamyslel se Matěj a sledoval slečnu Isabelu, jak se zařízením lomcuje.

Úloha 6.3. Nechť přímky p a q svírají v bodě V pravý úhel. Zvolme bod S takový, že jeho kolmý průmět S_0 na p a nějaké další dva body A, B na q jsou od S stejně daleko, čili $|SS_0| = |SA| = |SB|$. Označme α, β, γ po řadě úhly VS_0A, AS_0B, BS_0S. (Předpokládejme, že B je od V dál než A). Dokažte, že úhel α lze euklidovskou konstrukcí roztřetit (tj. sestrojit pomocí pravítka a kružítka úhel třetinové velikosti) právě tehdy, když lze roztřetit úhel β a ten lze roztřetit, právě když lze roztřetit úhel γ. Jinými slovy, dokažte, že lze roztřetit buď všechny úhly, nebo žádný.

Slečně Isabele se konečně podařilo natočit páky správným směrem a s vrzáním se otevřely dveře do jakéhosi tajného krytu. Slečna Isabela se naklonila do dveří a z plných plic zavolala vysokým hlasem: „Pane José! Můžete vylézt! Jsme zachráněni! Ten starej parchant už tady není!“ A po chvíli ze dveří skutečně vylezl starší muž, který lehce rozcuchaný a zaprášený mžoural do jasného světla. „Ach, konečně!“ Otočil k prosklené stěně a oči se mu zaleskly dojetím. „Už dlouho jsem neviděl Šanganjosechitin takto… děkuji vám převelice, přátelé.“

„Ehm… nezlobte se, ale kdo jste?“ nechápala Bubla a vyjeveně na něj zírala.

„Omlouvám se, ani jsem se nepředstavil. Jmenuji se José a jsem bratrem tady pana… Chitina. Víte, jak dostal Šanganjosechitin své jméno?“ skupinka zavrtěla hlavou.

„Povím vám tedy celý příběh,“ povzdechl si pan José a ztěžka se posadil do jednoho z křesel.

„Dříve se jmenoval pouze po našem drahém otci, Šanganovi I. Byl to moudrý král a nás jakožto své jediné dva syny velice miloval. Proto se rozhodl změnit název naší země tak, aby připomínal jména nás všech – otce, mne i mého nešťastného bratra. V historii naší milované země však nastalo období, kdy jsme měli ekonomické problémy a bylo třeba přijít s nápadem, který by zemi zachránil."

Úloha 6.4. V zemi Šanganjosechitin se nacházelo několik měst. Některé dvojice měst byly propojeny cestou tak, že se žádné dvě cesty nekříží a z každého města se lze po těchto cestách dostat do všech ostatních. José se rozhodnul dopravní síť zefektivnit. Proto z některých cest postavil rychlobruslařskou dráhu, po které se jezdilo rychleji. Protože byla ovšem přestavba drahá, rozhodl se přestavět co nejmenší počet cest tak, aby se po nově vzniklých bruslařských drahách opět šlo dostat z libovolného města do libovolného jiného.

Pro fungování bruslařských drah bylo nutné, aby se v některých městech postavily ochlazovátory. Kvůli úspoře peněz (a špatné ekonomické situaci v Šanganjosechitinu) musely být ochlazovátory postaveny nejvýše v polovině měst. Existují různé modely ochlazovátorů, ty se liší v barvě nebo typu konstrukce (mohou v obojím).

Aby se stejné ochlazovátory neshlukovaly a nepřehřívaly, bylo nutné, aby každé dva ochlazovátory, které sdílí cestu nebo bruslařskou trať, měly různý typ konstrukce.

Zároveň kvůli přehlednosti značení bylo třeba, aby pro každé město m, které neobsahovalo ochlazovátor, existovala barva b taková, že bude existovat právě jedno město obsahující ochlazovátor barvy b a propojené s m pomocí bruslařské dráhy.

Určete nejmenší počet modelů, který stačil pro libovolnou mapu měst, cest a rychlobruslařských tratí.

„Byla to skutečně přelomová myšlenka," vzpomínal dojatě pan José. „Podařilo se mi vymyslet způsob, jak postavit rychlobruslařské dráhy a Šanganjosechitin ekonomicky i kulturně vzkvétal. Ale bratříček to bohužel nebyl schopen unést," povzdechl si.

„Strašlivě na mne žárlil. A když náš nebohý otec Šangan I. zemřel a jmenoval mne svým nástupcem, Chitin mne na několik dlouhých let uvěznil a sám se chopil vlády nad Šanganjosechitinem. Určitě bych zešílel nebo zemřel hlady a steskem, nebýt tady slečny Isabely. . . " jeho ramena se začala třást. „Omluvte mne." A s teatrálním gestem se otočil a slečně Isabele vlepil na tvář mlaskavý polibek. Ta opět začala ladit s jejími šaty spěšně odcupitala z místnosti.

„Před jak dlouhou dobou vás uvěznil?" vydechla Liběnka.

„Bude to devět let."

„Takže úplný ciferný součet čísla 360 a všech jeho dva-na-entou-násobků pro n celá?" vyhrkl Ňouma.

„Ňoumo, buď trochu citlivý," obořila se na něj zamračená Liběnka, na které příběh pana Josého zanechal hlubokou stopu.

Úloha 6.A. Úplný ciferný součet racionálního čísla s konečným desetinným rozvojem je operace, kde děláme ciferný součet ciferného součtu ciferného součtu... dokud nedojdeme k jednocifernému číslu: např. $1498 \mapsto 1+4+9+8 = 22 \mapsto 2+2 = 4$ nebo $22{,}5 \mapsto 2+2+5 = 9$ (tzn. nebereme ohled na desetinnou čárku).

Dokažte, že úplný ciferný součet čísla 360 a každého jeho 2^n-násobku (pro n celé) je 9.

„To je v pořádku," povzdechl si pan José. „Co bude teď s vámi? Chtěli byste zůstat u nás v Šanganjosechitinu?"

BRKOS Team 2020

„Měli bychom jet domů,“ prohlásila Liběnka.

„Ach, ano… samozřejmě… Řekněte nám, kdybychom pro vás mohli cokoliv udělat… Šanganjosechitinská univerzita a celý Šanganjosechitin vám nikdy nepřestane být vděčný za služby, které jste nám prokázali. Kdykoliv jste u nás vítáni, přátelé.“

„A co bude s tím přístrojem?“

„Můžete ho využít na cestu domů, pokud budete chtít.“

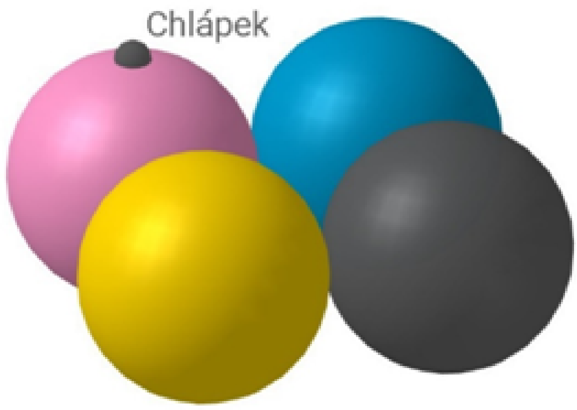
„To zní jako fajn nápad, aspoň se nebudeme muset zase handrkovat lodí,“ souhlasil Matěj a sednul si k poznámkám se souřadnicemi a kódy, které byly třeba zadat do přístroje, aby je přepravil na dané místo. „Pojďte sem, můžeme jet!“

„Sbohem, pane Chitine, sbohem, slečno Isabelo! Mějte se dobře a díky za všechno!“ Přístroj se zableskl a skupinka… se objevila jakémsi podivném vesmírném prostoru. Jakoby najednou byli obklopeni hvězdami a mlhovinami a každý krok se zdál být lehčí než normálně. Snad by se i nechali trochu unést tou krásou okolo nich, kdyby z dálky směrem k nim nespěchal shrbený stařík s kloboukem a vidlemi v ruce.

„Koukejte uhnout, zrovna jsem to natřel!“ křičel rozzlobeně a vidlemi u toho výhružně mával.

„Doprčic. Vypadá to, že ten přístroj pořád nefunguje tak, jak má.“

Úloha 6.B. Ve vesmíru je soustava čtyř planet s poloměrem 1, které se dotýkají jako na obrázku. Chlápek žije na jednom pólu jedné planety (nejvyšší bod). Chce natřít co největší povrch všech 4 planet, ale zvládne ujít vždy jen určitou vzdálenost d, po které se musí nacházet zase doma, než vyrazí znovu natírat. Jaká je vzdálenost d, jestliže nenatřený povrch poté, co Chlápek natřel všechny dosažitelné body, odpovídá svojí rozlohou povrchu jedné planety?



„Nechcete třeba pomoct?“ navrhla Bubla a snažila se staříka při pohledu na ostré konce vidlí nějak uklidnit.

„To tak, ještě byste to zvorali! Koukejte jít pryč,“ vyhnal je nesmlouvavě.

„Co bude teď s námi ale?“ zazoufal Ňouma.

„Ničeho se nebojte,“ ujišťoval je Kouma, „domů nás to sice nedostane, ale je tu tlačítko, které nás vrátí zpět do Šanganjosechitinu. Je to taková záchrana, kdyby se něco pokazilo.

Nemyslel jsem si, že to využijeme tak rychle.“ A o chvíli později přistáli zpět v kanceláři před panem Josém.

„No, nečekal jsem vás tu zpět tak rychle,“ smál se a vyptával se na důvod jejich návratu.

„Víte, ten přístroj ještě chce nějaká vylepšení.“

„Já vám radši nechám vypravit tu loď, co říkáte?“

„To by bylo fajn.“ A o chvíli později už kráčeli směrem k přístavu. Přístav měl tvar velikého čtyřúhelníku. A Matěj se při pohledu na plánek přístavu zase neudržel a začal si dobírat Ňoumu: „Že neumíš dokázat o čtyřúhelnících tohle! A že ne tohle!“ A vymýšlel různé otázky a přístavem se nesl jejich smích a veselý hovor.

Úloha 6.C. Jedna z Koumových otázek zněla takto: Dokažte, že pokud pro čtyřúhelník $ABCD$ platí, že AB je kolmé na CD a BC je kolmé na AD, pak i AC je kolmé na BD.

„Těším se domů,“ usmála se Liběnka, zatímco Matěj si pořád dělal srandu z Ňoumy.

„Já taky. Tohle dobrodružství už bylo trošku moc dlouhé,“ souhlasil Henry a rozhlížel se po lodi, která je měla zavézt domů. Ta už v přístavu čekala. A už z dálky bylo vidět, že je na ní vztyčená vlajka – ta šanganjosechitinská.

Úloha 6.D. Šanganjosechitinská vlajka má tvar (libovolného) trojúhelníku. Nechť a, b, c jsou strany trojúhelníku, který ji tvoří. Ukažte, že

$$(a + b + c)^4 + 16(a^2 + b^2 - c^2)^2 \geq 64a^2b^2.$$

Všichni unaveně seděli na na přídi lodi a nechali se hřát paprsky pomalu zapadajícího slunce. Loď je unášela domů, nad nimi vlála šanganjosechitinská vlajka a věděli, že tímto dobrodružství pro tentokrát končí. Mysleli na pana Josého, na slečnu Isabelu, na Zrzouna a Drzouna, i samotného pana Chitina a to, kde mu je asi konec.

„Co budeme dělat teď?“ otočila se na skupinku Liběnka.

„Něco vymyslíme,“ řekl líně Henry a pohodlně si natáhl nohy na zábradlí lodi.

„Nejprve bychom si měli pořádně odpočinout,“ zívl Matěj.

„A zahrát si zase nějaké hry,“ usmál se Ňouma.

„A naučit nějaké nové kousky Hnědáka. Vyklepávat pořád prvočísla je už nuda, nemyslíš?“ ozval se Kouma.

„Co bys řekl na dokonalá čísla?“ navrhla Bubla.

„Nebo netriviální nuly Riemannovy zeta funkce?“ blýsklo se v očích Koumovi.

„Nebo obojí?“ tázavě se oba podívali na Hnědáka. A ten jen spokojeně zařehtal.

Pokračování v příštím ročníku.

Svá řešení uploadujte na našich stránkách:
`http://brkos.math.muni.cz/`