

Zadání 5. série

GEOMETRIE

Termín odeslání: 30. 3. 2020

Text kurzívou není součástí úloh.

„Kde jste to vdali?“ vykulil oči Drzoun.

„No já dírám,“ hlesl Zrzoun.

„Je to to, co si myslím?“ nevěřil Drzoun.

„Musíme to přeměřit,“ prohlásil Zrzoun a jal se vytahovat různorodé předměty z kapes.

„Ten je jak ty,“ dloubl Matěj do Liběnky, když mlčky pozorovali, jak Zrzoun z kapes loví všelijaké krabičky, sáčky, sladkosti a vůbec spoustu překvapivých předmětů, u nichž neměli tušení, proč by je někdo nosil u sebe. Po chvíli vítězoslavně vytáhl dvě odřené pravítka, dvě tužky s logem společnosti IKEA (nebo snad BRKEA? Autor si v této části příběhu není jistý, pozn. red.) a jedno stříbrné kružítko. Drzoun se natáhl pro kružítko, ale Zrzoun rychle ucukl.

„To tak, ty bys to ještě poplet.“

„No dovol, ty dmetku“ ohradil se Drzoun a Zrzounovi dal pěstí do břicha. Následovala krátká potyčka, při níž padla spousta ran i urážek a na jejímž konci Zrzoun opět vítězoslavně třímal staré kružítko v ruce.

ÚLOHA 5.1. Drzoun a Zrzoun chtějí přesně zreplikovat kruhový modul. Drzoun stojí u originálu pouze s pravítkem a tužkou (čili dokáže kreslit body, čáry, ne kružnice, a dokonce měřit vzdálenosti dvou bodů) a rozměry hlásí Zrzounovi, který má k dispozici pravítko, tužku a kružítko. Navrhnete, jak modul ve tvaru kružnice změřit, pokud není znám střed ani poloměr.

„Úžasné!“ Oba nějakou dobu s údivem pozorovali modul ležící na stole, ale po chvíli se opět začali šeptem dohadovat a vzrušeně gestikulovat. Zrzoun rozhovor ukončil rázným kývnutím hlavy směrem ke skupince nově příchozích, zamračil se a spěšně odešel.

„Nabídnu vám něco k pití?“ zeptal se Drzoun líbezným tónem, načež mu ale po tváři přeběhl zvláštní mdlý výraz. S pokřiveným úsměvem začal úslužně rovnat na stůl hrníčky a skleničky všech možných tvarů a velikostí.

Kouma se zamyšleně napil čaje a zamračeně pozoroval tu zvláštní dvojici shrbených postavíček, které spolu už zase cosi vzrušeně řešily. „Mně se to zdá nějaké divné.“

„Co myslíš?“ zajímala se Liběnka a taky se napila čaje.

„Zdá se mi, že na nás šijí nějakou boudu.“

Ňouma mezitím nezaujatě zíval a pozoroval mokrá kolečka, která po sobě na stole zanechaly hrnky s čajem. Matěj si toho všimnul a prstem začal kolečka obtahovat. „Víš, Ňoumo, co je na kružnicích zajímavé?“

ÚLOHA 5.2. Dvě různé kružnice k_1, k_2 mají stejný poloměr a dotýkají se v bodě X . Označme jejich středy popořadě S_1, S_2 a uvažujme libovolný bod A na kružnici k_1 . Na

kružnici k_2 pak máme jediný bod B takový, že úsečky AB, S_1S_2 jsou rovnoběžné a stejně dlouhé. Ukažte, úhel AXB je vždy pravý.

Zrzoun stále postával u modulu a nervózně pozoroval skupinku nově příchozích. Po chvíli Drzoun přitáhl tlustou knihu a velkou krabici. V knize chvíli zamračeně listoval, načež se jeho zamračení postupně začalo měnit na široký úsměv.

„Je to ono! Je to ono!“ vykřikoval a začal po pokoji poskakovat.

„Můžete nám říct, o co tady jde?“ zvedl se našťavaně Kouma a rázným krokem přešel k Drzounovi, který se ještě více shrbil a hlasitě smál. „Tady je ta součástka, kterou jsi nám donesl, popsaná,“ ukazoval na tlustou knihu „ale něco ti tady chybí dokreslit.“

„Všechno tady je.“ Kouma vzal našťavaně papír a překvapenému Zrzounovi vytrhl kroužítka z ruky. Nákres začal překreslovat ještě jednou.

ÚLOHA 5.3. Jsou dány dvě kružnice k_1, k_2 se středy S_1, S_2 , které se neprotínají ani nedotýkají. Najděte kružnici l se středem R ležícím na přímce S_1S_2 takovou, že protíná každou z kružnic k_1, k_2 ve dvou bodech a v každém z průsečíků jsou tečny k oběma kružnicím navzájem kolmé.

„Ten kluk ví, o čem mluví,“ pokýval uznale hlavou Zrzoun. Drzoun stále ještě poskakovat, načež se prudce otočil. Rozmáchl se rukama v teatrálním gestu, ale nevyšiml si, jak blízko stojí modul. V tu chvíli se ale ozvala rána a stroj se rozletěl na několik kusů. Na okamžik zavládlo hrobové ticho.

„No to si snad zěláš...!“ zajíkl se Zrzoun.

„Já fakt nechtěl, byla to nehoda!“

„To je průser.“

„Máma mě dabije.“

Kouma hleděl na jeho rozpadnutý výtvar s kamenným výrazem.

„Třeba to půjde slepit,“ utěšovala Koumu Bublá.

„To půjde spravit...“ přidal se k ujišťování Matěj.

„Podívejte se ale, jaké krásné to má tvary,“ snažila se zachránit situaci Liběnka a začala své plány realizovat na tabuli.

ÚLOHA 5.4. Liběnka namalovala na tabuli bazmek a Kouma s Ňoumou, protože netušili, co to bazmek je, jej raději náhodně polepili konečně mnoha kruhovými samolepkami různých velikostí. Liběnka jim pak rozčileně nakázala, ať některé odlepí alespoň tak, aby zbylé nalepené byly po dvou disjunktní (žádné se nepřekrývali, a to ani bodem). Kouma s Ňoumou na Liběnku však vyžráli, neboť kruhy nebyly pouze samolepicí, nýbrž i samonafukovací. Po odlepení se tedy každá zbylá nalepená samolepka n -krát zvětšila ze svého středu, takže opět pokrývají celý bazmek. Pro které nejmenší reálné n si Kouma s Ňoumou vždy mohou vybrat, které nalepené po dvou disjunktní samolepky zachovat, aby po nafouknutí opět pokrývaly celý Bazmek? Dokažte.

„Takový objev to byl,“ zoufal nad neštěstím Kouma, kterého hezké tvary střepů nezajímaly.

„Všechna práce není dtracena,“ snažil se ho uklidnit Drzoun „co se stane, když dáme tohle sem?“ Vzal do ruky dva díly a snažil se je spojit. Neúspěšně.

„Ty kruhové části musí mít naprosto přesnou velikost,“ vysvětloval Kouma nešťastně

„je opravdu náročné je vyrobit.“

„Jak se na to tak koukám, tak by to možná šlo více dpůsoby,“ prohlásil Drzoun.

ÚLOHA 5.A. Nechtě K, L jsou kruhy, které mají společný vnější dotyk. Nechtě obsah K je πn a obsah L je πm , kde m, n jsou přirozená čísla. Jaký je nejmenší přirozený poloměr takový, že existuje kruh s tímto poloměrem, který zakryje oba původní kruhy?

„Pozívej, můžeme aspoň poskládat ovládací panel,“ zamyslel se Drzoun, „třeba to nebuze takovej průser.“

Ovládací panel měl tvar čtverce, do kterého byly vloženy jednotlivé ovládací prvky o rozměrech $1 \times 1, 1 \times 2, \dots$ až $1 \times n$.

ÚLOHA 5.B. Mějme n obdélníkových dílků o rozměrech $1 \times 1, 1 \times 2, \dots$ až $1 \times n$. Pro která přirozená n lze z těchto dílků seskládat kompletní čtverec?

Displej skutečně zablikal a ozvala se úvodní melodie. Potom ale přístroj zase zhasnul a nejevil známky života.

„Víš, co to dnamená?“ zeptal se zamračeně Zrzoun a Drzoun jen nervózně polknul. „Musíme za panem Chitinem.“

„Kdo je pan Chitin?“ zajímala se Liběnka. Oba shrbenci se na ni podívali, jako kdyby spadla z Marsu. „Přece šéf,“ poklepal si na čelo Zrzoun a vyšel ze dveří. „Pojďte da mnou.“

Prošli zdobeným atriem plným antických soch a podivných lidí, zašli za několik rohů, až se ocitli před velkými dveřmi. „Datracenej kód! Vždycky ho dapomenu!“ rozčiloval se Drzoun. Podíval se na mohutné železné dveře a našťvaně do nich praštil.

„Počkej, ještě to zničíš,“ protáhl se ke dveřím Matěj a poškrábal se na hlavě.

„Stačí zadat řešení téhle rovnice, je to tady napsané.“

ÚLOHA 5.C. Kód je možné zjistit po vyřešení následující rovnice: v oboru přirozených čísel řešte rovnici $13 \cdot \text{NSD}(x, y, z) + 3 \cdot \text{nsn}(x, y, z) = xyz$, kde NSD značí největší společný dělitel a nsn značí nejmenší společný násobek.

Octlí se ve zšeřelém prostoru, kde se ozývalo bzučení a praskání elektřiny, které občas přerušovalo jemné zapípání.

„Vítejte v Lampovém lese,“ ozval se digitální hlas odkudsi z dálky. Ostatní se na sebe zmateně podívali, ale Drzoun a Zrzoun z výjevu před nimi očividně překvapení nebyli.

„Pan Chitin miluje hry,“ vysvětloval Zrzoun.

„A pokuz ho chce někzo navštívit, musí pro to něco taky uzělat,“ doplnil ho Drzoun.

ÚLOHA 5.D. Na některých stromech Lampového lesa se nachází platformy. Každá platforma má tvar kruhu s kmenem stromu uprostřed. Po obvodu každé platformy se nachází nenulový počet lamp. Pokud se na platformě nachází aspoň dvě lampy, tvoří jejich pozice vrcholy konvexního mnohoúhelníku (pro tuto úlohu berme úsečku za konvexní dvojúhelník). Řekneme, že dvě lampy spolu sousedí na platformě, pokud jsou spojeny stranou tohoto mnohoúhelníku. Některé platformy jsou propojeny provazovými mosty. Každý most propojuje právě dvě platformy, navíc každému konci je přiřazena právě jedna lampa. Řekneme, že dvě lampy spolu sousedí, pokud spolu sousedí na platformě, nebo se nachází na opačných stranách jednoho mostu. Mosty jsou postaveny tak, že pro každé dvě platformy

existuje právě jeden způsob, jak mezi nimi přejít, pokud každý most použijeme jen jednou a nezajímá nás, v jakém směru jsme prošli po platformě (tedy jakým způsobem jsme na každé platformě obešli strom). Zrzoun a Drzoun zapalují lampy na platformách. Nejdříve zapálí Zrzoun nějakou lampu zlatým plamenem, pak zapálí Drzoun nějakou lampu duhovým plamenem. Následně se střídají na tahu počínaje Zrzounem. Hráč, který je na tahu musí zapálit libovolnou lampu, která sousedí s jinou lampou hořící jeho barvou. Pokud taková lampa neexistuje, vynechává tah. Hráči mohou zapalovat pouze nehořící lampy. Na začátku nehoří žádná lampa. O struktuře platform a mostů víme pouze to, že dohromady se na platformách nachází 2019 lamp. Oba hráči se snaží maximalizovat počet lamp jejich barvy. Kolik lamp si může zaručit Zrzoun na každém rozdělení platform, lamp a mostů?

Liběnka, Matěj, Henry, Bubla, Kouma i Ňouma zírali s otevřenou pusou na dva shrbence, kteří poskakovali mezi jednotlivými lampami a po každém dalším takovém přeskočení les zářil víc a víc.

Když se konečně zastavili, les hýřil všemi barvami a byl nádherný. „Můžete- můžete mě následovat,“ vysoukal se sebe udýchaně Zrzoun a rázně si odfoukl z čela pramen zrzavých vlasů. Hnědák se chvíli nedůvěřivě zadíval na visuté mosty, ale potom zařehl a jako první se vydal na cestu. Na konci lesa byl prázdný prostor zaskládaný krabicemi a dalším harampádím. Z jedné strany vedla chodba, ve které slabě zablikala zářivka a ozval se klapot podpatků.

„Dobrý den!“ ozval se vysoký hlas a zpoza rohu se objevila silně namalovaná dáma, která vratce cupitala na vysokých podpatcích. „To jste si dali na čas! Pan Chitin vás už očekává.“

Pokračování v příští sérii.

Svá řešení uploadujte na našich stránkách:

<http://brkos.math.muni.cz/>