Zadání 4. série

Algebra

Termín odeslání: 17. 2. 2020

Text kurzívou není součástí úloh.

„Vítejte v demi da sedmero vrchovatými horami a sedmero jedovatými řekami, jež se nadývá Šanganjosechitin!“ přivítal naše hrdiny podivín, který měl páteř zkroucenou téměř do pravého úhlu. „Jste v pořádku?“ otázal se Henry, „vypadá to, jako byste neuměl vyslovit 'z'.“ „Máte pravdu. Stalo se to, když jsem v mládí dtratil svůj první dub.“ „Chcete říct zub?“ opravila ho Liběna. „Ne, myslím dub. I s kořeny!“ opravil podivín zase Liběnku.

Úloha 4.1. Drzounův strom měl ve skutečnosti tvar polynomu třetího stupně. O jeho ztracených kořenech si Drzoun pamatoval jen to, že dva z nich byly 1 a 2. Navíc věděl, že absolutní člen polynomu je druhá mocnina nějakého celého čísla. Jakou honotu mohl mít třetí kořen polynomu?

„Ještě jsem se nepředstavil, moje jméno je Drdoun“. „Vždyť nemáte ani zrzavý vlasy,“ pronesla Liběnka, která si už na podivínovu divnou řeč zvykla. „To ne, ale na rodiče jsem byl vždycky drdý. Teď už ale vyradíme po řece k našemu dádemí. Nasedněte prosím dde na tyto klády“. Kouma s Ňoumou na sebe významně podívali. To slovo „kláda“ jim připomnělo úlohu, o které si doma povídali,

Úloha 4.2. Máme dána čtyři kladná reálná čísla a, b, c, d. Víme, že $\frac{c+d}{a+b} = cd = 2$. Nalezněte nejmenší hodnotu součtu $2(a + b + c + d)$.

Jak tak všichni pluli po řece, Hnědák z nudy a z nepokoje, že co jsou v nové zemi, se mu ještě nevěnovala pozornost, začal chlemtat vodu z řeky. V tom ale Drzoun vykřikl: „Pozor, je tu spousta jedů.“ Hnědák vyvalil oči, vyprskl vodu na všechny pasažéry a začal se děsit blížící se smrti otravou. Uklidnil se až při pohledu na jez, který křížil řeku. „Klády nasměrujte přesně po směru řeky!“ poučil cestující Drzoun. To se ovšem našim hrdinům až překvapivě nedařilo, a tak vzniklá formace vypadala spíš jako „menší nebo rovno“. Navíc pod jezem Henry uviděl hromadící se větve a listí, které mu okamžitě začaly připadat, jako nějaká písmena a čísla. Dohromady vše tvořilo obraz nerovnosti. Náhoda? nemyslím si...

Úloha 4.3. Nechť x, y, z jsou kladná reálná čísla, dokažte, že platí:

$$\frac{\sqrt{x+y+z}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x+z}+\sqrt{y+z}} \geq \frac{2}{5}.$$

Po několika jezech, které zkušený kládový konvoj překonal bez jediného převrhnutí (pokud nepočítáme Hnědáka, který strávil prakticky všechen čas ve vodě, jelikož se mu kopyty *špatně drželo pádlo), začal vzduch okolo pomalu řídnout a všechny teplotní veličiny se vydaly na výlet k nule. Nikdo už dlouho nepromluvil ani slovo a tak se v trapném tichu začaly objevovat komentáře počasí. „Zima," „Klendra," „Frišno,"„Mně snad mrzne mozek!"„Líp bych to nepodnamenal", odvětil Drzoun po poslední frázi. „Ale je to aspoň inspirující počasí, že?", ozval se Kouma, „Tady je tak extrémní počasí, jako extrémy funkce, kterou vám teď popíšu."*

Úloha 4.4. Najdětě všchny funkce $f : \mathbb{Q} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}$ takové, že pro každé $x, y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ splňující $x + y \neq 0$ platí:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{x+y} + 2xy.$$

„Hele, pane Drzoun," ozval se Matěj, „umíte vyslovit například 's'?" „Sova, Sýček, Separační lemma, no asi jo" zkoušel Drzoun. „No a nepřijde vám praktičtější nahradit 'z' za 's' namísto 'd'?" Matěj se nápadem pyšnil natolik, že uznal za vhodné pronést tuto myšlenku i nahlas, což je u něj vzácný okamžik. „Tomu říkám podnámka k damyšlení, nebo bych mohl zkusit říct 'posnámka k samyšlení'? Ale nepřijde tobě praktičtější říct například 'rybíd nám na dahrádce dodrál' než 'rybís nám na sahrádce …'" „Chápu, chápu," zastavil Drzouna Matěj. „Kdybys Matěji držel raději jadyk da duby a pomohl mi rodlousknout tuto dáhadu o přirodených číslech:"

Úloha 4.A. Dokažte, že pokud lze číslo k zapsat právě 7 způsoby jako k = a x b, pro nějaká a, b přirozená, pak je šestou mocninou prvočísla.

„Zrzoune! Koho nám to čerti vezou!" ozval se z mola další podobný podivín se zrzavým drdolem na hlavě, shrbený úplně stejně jako Drzoun. „Drdoune, kde ty ses tady vdal?" odpověděl Drzoun. „Přátelé, toto je můj bratr Drdoun. V mládí se mu taky trochu dkomplikoval jadyk, tak teď říká 'd' místo 'd'."„Zrzoun chce říct 'z' místo 'z'," opravil Drzouna bratr, o kterém nikdo netušil, jak se jmenuje. „Tak teď je tu takový zmatek, až mi z toho jde hlava kolem," povzdechla si Libenka. Ňouma pak správně poznamenal: „Víš, že kdyby se ti posunula a pak ještě pootočila, tak je to to samý, jako kdyby se jenom otočila, ale kolem jiné osy?"

Úloha 4.B. V rovině je dán mnohoůhelník M. Kouma jej nejdříve posunul a pak otočil nenulový úhel menší než $360°$, čímž získal nový mnohoúhelník M'. Dokažte, že si Ňouma nyní vždy může vybrat v rovině bod B a úhel α tak, že když otočí M' kolem bodu B o úhel α, dostane zpět přesně mnohoúhelník M.

„Mohu si dovolit ještě jednu otázku?" pravil zdvořile Matěj, který se tvářil jako by měl v hlavě brouka s celou svojí rodinou, „Bude to dase o našem jadyku?" ujišťoval se otráveně Drzoun. Matěj přikývnul. „Tak to ne a už nebuď drdej."„Jo, nebuď zrzej." napomenuli Matěje bratři. Matěj změnil svůj broučí výraz na nový, jako by mu něco frnklo přes nos. A ono doopravdy. „To jsou jen běžci místního traziční hranatého závozu."„Ano, od letoška budeme pořádat tenhle dávod každý rok!" vysvětlovali podivíni. To ještě ale nevěděli, že tento závod bude pravděpodobně i poslední.

Úloha 4.C. Máme nekonečný systém ulic newyorského typu (ulice tvoří čtvercovou mřížku). Konají se zde běžecké závody. Ze startu se běží nejprve směrem na východ. Pravidla říkají, že při příchodu na libovolnou křižovatku musíme zabočit doprava nebo doleva, nesmíme jít rovně nebo se vracet. Cílem soutěže je přiběhnout ke startu směrem z východu. Ukažte, že závod nelze dokončit.

Den už se sešeřil a závodníci si stále lámali hlavu s cestou do cíle. Návštěvníci už však dále nemohli pokračovat ve sledování poutavého závodu, jelikož chtěli zjistit něco o tom tajemném předmětu, kvůli kterému sem vlastně přijeli. Henry měl ovšem kufr na číselnou kombinaci, kterou úspěšně zapomněl. Jediné, co si pamatoval, bylo, že číselný kód je zároveň řešení nějaké diofantické rovnice. „No bezva, teď abychom vyřešili všechny diofantické rovnice na světě.“ postěžoval si Matěj. „Začněme touto:“

Úloha 4.D. Řešte diofantickou rovnici $(a+b)(b+c)+2b(a+b+c)=0$, kde c je prvočíslo.

Možná to byla náhodou správná kombinace, možná má Drzoun opravdu ostrou sekeru, ale se kufr každopádně otevřel. Henry vyjmul Věc z kufru. Doufal, že zde si budou vědět rady co s Tím. „Ukažte to, zze si určitě buzeme vězět razy, co s tím.“ Pak si to podivín ještě chvíli prohlížel a Liběnka započala typickou konverzaci ohledně reklamace: „Koupili jsme si to, strčili do zásuvky, ale nic to nedělá. Poraďte nám, nebo nám vraťte peníze.“ Pak si to převzal Drzoun a vyřkl větu, která přesvědčila všechny jak o funkčnosti zařízení, tak i o účelu celé této výpravy: „Dkusili jste to vypnout a dapnout?“

Pokračování v příští sérii.

Svá řešení uploadujte na našich stránkách:
`http://brkos.math.muni.cz/`