

Zadání 3. série

## TEORIE ČÍSEL

Termín odeslání: 13. 1. 2020

**Text kurzívou není součástí úloh.**

... „*To znamená,*“ přerušil ho Kouma a v očích se mu blýsklo, „*že jedeme do Šanganjosechitinu.*“

*Na malou chvíli zavládlo ticho, které přerušila Bublá. „Hurá!“ vypískla.*

*„Co tam budeme dělat?“ nechápal Ňouma.*

*„Musíme se o naše zjištění podělit s místními vědci,“ vysvětloval Kouma.*

*„Podle mě je blbost, tam jet.“*

*„Proč by to jako měla být blbost?“*

*„Vždyť vůbec nevíš, jestli to je správně.“*

*„Jsi hloupej, nebo co?“*

*„Ty jsi.“*

*„Jsi iracionální.“*

*„Nejsem.“*

*„Jsi.“*

*„Pokud vám do toho můžu vstoupit,“ ozval se hlubokým hlasem pomalu Hnědák, „tak iracionální je jenom číslo v této zajímavé úloze.“*

*Vsichni najednou zmlkli, protože to bylo vůbec poprvé, co Hnědák pronesl delší větu. Ten však už nic nedodal a neuzrušeně začal okousávat sušené květiny v opodál stojící váze.*

**ÚLOHA 3.1.** Nechtě je dáno iracionální číslo  $x$ . Změňme v jeho desetinném rozvoji právě 3 číslice a výsledné číslo označme jako  $y$ . Rozhodněte, za jakých podmínek bude  $y$  také iracionální.

*„Co všechno teda budeme potřebovat?“ zeptala se Bublá.*

*„Musíme si vzít velikou svačtinu,“ prohlásil Henry.*

*„A taky hodně knih,“ dodal Matěj.*

*„A teplé ponožky,“ pokračoval Kouma.*

*„Dejte mi chvíli,“ řekla Liběnka a zmizela. Po nějaké době se ozval rámus a Liběnka se trochu rozcuchaná objevila zpoza dveří, za sebou táhla veliký kufr a hlasitě oddychovala.*

*„Vzala jsem jen pár nejnnutnějších drobností.“*

*„A co uděláme s Hnědákem?“ zeptal se Matěj opatrně.*

*„Hnědák jede přece s námi,“ prohlásila Bublá nesmlouvavě tónem, o kterém ostatní věděli, že když ho použije, nemá cenu se s ní dohadovat.*

*„Jen budeme potřebovat pár krabic toho koňského žrádla.“*

*Ňouma s Henrym mezitím seděli u Hnědáka a snažili se ho naučit další prvočíselné kousky. Hnědák spokojeně vyklepával kopyty prvočísla a občas si z radosti zařehotal. Vypadal, že je rád, že se s ním na výpravě počítá.*

**ÚLOHA 3.2.** Hnědák umí kopyty vyklepat každé číslo  $p$ . Necht'  $p$  je prvočíslo,  $k$  je přirozené číslo. Ukažte, že pokud je  $k$  složené, rovnice  $x^k - y^k = p$  nemá v  $\mathbb{N}$  řešení.

*„Tak tedy můžeme vyrazit?“ zeptal se Kouma, když zapnul svůj pečlivě nabalený batoh. Ostatní začali přikyvovat. Pomalu se rozešli na vlakové nádraží a vzrušenými hlasy debatovali o tom, co je čeká. Když nasedli do vlaku, Henry vytáhl pomačkanou mapu a dlouze se do ní zahleděl, Liběnka šla spát a Ňouma si začal číst v jakési tlusté knize. Bubla si sedla na zem do uličky a hladila Hnědáka, který se se zájmem rozhlížel po vlaku i ostatních spolucestujících, kteří s nemenším zájmem hleděli na něj.*

*A Matěj s Koumou dali hlavy k sobě a začali znovu procházet Koumovy výpočty. „Proč je tady tohle?“ Matěj nechápavě ukázal na jeden z výpočtů. Kouma vytáhl tužku. „To je na delší vysvětlení. . .“ řekl a začal psát.*

**ÚLOHA 3.3.** Necht'  $a, b, c$  jsou taková přirozená čísla, že platí  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ . Dokažte, že  $a + b$  je dělitelné nějakým kvadrátem větším než jedna.

*„Představ si, jaké to bude, až jim to ukážeme,“ zasníl se Kouma, když dopočítal příklad. Vlak tiše utíkal po kolejičkách a za okny se začalo stmívat.*

*„Já mám hlad,“ ozval se Henry, „je čas na nějakou večeři.“ Liběnka ponořila ruku do svého obrovského batohu a po chvíli přehrabování vytáhla krabici plnou toustů. Tousty měly tvar trojúhelníku a Henry se na ně zasněně podíval. „To je ale krásný tvar. . .“ řekl a do jednoho z nich se zakousl.*

**ÚLOHA 3.4.** Tousty mají tvar trojúhelníku s celočíselnými stranami  $a, b, c$ . Najděte všechny takové trojice  $(a, b, c)$ , že existuje pravoúhlý trojúhelník se stranami  $\sqrt[6]{a}, \sqrt[6]{b}, \sqrt[6]{c}$ .

*Po několika hodinách jízdy se trochu rozlámaní vzbudili a zjistili, že vlak zastavil.*

*„Výstupovat!“ zaznělo nad jejich hlavami tak hlasitě, až nadskočili. Spěšně si pobrali všechny věci a zamžourali do jasného světla. Slunce lehce hřálo, ale trávu začala pokrývat námraza a i na výkladních skříních kouznila jemné obrazce z drobných krystalů.*

*„Mně je dneska nějaká zima,“ prohlásila Liběnka a ztratila se za velikým víkem kufru.*

**ÚLOHA 3.A.** Liběnka přemýšlí, jak se dnes obléci. V kufru má 5 různých kabátů. Kolika způsoby se může obléci, pokud si může najednou nasadit libovolný počet z těchto svršků a záleží na pořadí?

*„Na co s sebou taháš tolik krámů?“ nechápal Matěj, který pozoroval Liběnku, jak na sebe souká jednotlivé svetry a kabáty a vyhazuje u toho ven rozličné předměty, od sítky na motýly přes smeták po růžového nafukovacího plameňáka.*

*„Víš ty co, nikdy nevíš, kdy se ti to může hodit. Několikrát se mi to u cestování osvědčilo. A až třeba ztroskotáme, tak mě budeš prosit, abych ti něco půjčila,“ nenechala se odbýt Liběnka a zaklapla víko kufru. Pomalu došli do přístavu, kde už byla nachystaná loď. Lehce se pohupovala na drobných vlnkách a vypadala, že čeká na ně.*

*„Tak jdeme na to!“ zvolal Kouma a opatrně vkročil na nástupní plošinu, která se pod jeho vahou lehce prohnula. „Dámy a pánové – a taky drazí koně, chtěl jsem říct – račte nastupovat.“*

*Nástupní plošina měla tvar čtyřúhelníku, který vzniknul takto:*

**ÚLOHA 3.B.** Je dán rovnostranný trojúhelník  $ABC$  s obsahem 1. Nalezněte bod  $D$  tak, aby čtyřúhelník  $ABCD$  byl tětíkový a měl co největší obsah. Tento obsah spočítejte.

*Jeden po druhém nastoupili na loď a posadili se na příď lodi. Bubla se ujala kormidla a ostatní si začali povídat.*

*„Dlouho jsme nic nehráli,“ posteskl si Ňouma, „Hnědáku, nechceš něco zkusit?“ Křídou na zem nakreslil velkou šachovnici a Hnědák se nad ni se zájmem nahnul. Při pohledu na ni si vesele poskočil, až se naklonila celá loď.*

**ÚLOHA 3.C.** Máme šachovnici  $n \times n$ , kde  $n$  je přirozené číslo větší než 3. Za kolik nejméně tahů může Hnědák (nezapomeňme, že se pohybuje jako správný kůň ve tvaru písmena L) projít všechna políčka na hlavní diagonále?

*„Ty jsi fakt chytřej koníček!“ chválil Hnědáka Ňouma a natahoval k němu dlaň plnou koňského žrádla.*

*Bubla to pozorovala z velitelského můstku a usmívala se. Zahleděla se do dálky, zařadila kurz a spokojeně sledovala vlny, jak naráží do lodi.*

**ÚLOHA 3.D.** Prostor u kormidla vypadá tak, že má tvar mnohoúhelníku. Dokažte, že každý – i nekonvexní – mnohoúhelník má dvojici vrcholů, které mají společného souseda a jejichž spojnice leží celá v mnohoúhelníku.

*Druhý den ráno se na lodi probudili a po snídani, které se zúčastnili jen ti, kteří netrpěli mořskou nemocí, se znovu posadili na příď lodi. Na horizontu začalo svítat a před nimi se v dálce objevila silueta města, které se pomalu začínalo probouzet.*

*„Tak už jsme tady.“*

**Pokračování v příští sérii.**

**Svá řešení uploadujte na našich stránkách:**

<http://brkos.math.muni.cz/>