Zadání 2. série

HRANATÉ HRY

Termín odeslání: 25. 11. 2019

Text kurzívou není součástí úloh.

Liběnka, Matěj, Henry, Bubla i Kouma s Ňoumou seděli na pestrobarevných gaučích a na okamžik mezi nimi zavládlo ticho. Tváře měli ještě všichni trochu červené z fackovací hry, kterou před chvilkou dohráli.

„Měli bychom už fakt něco vymyslet," řekl po chvíli rozhodně Henry a poškrábal se na tváři, na které byl sytě červený obtisk Koumovy dlaně. Ostatní začali přikyvovat.

„Mohli bychom hlasovat," prohlásila Liběnka, která byla ještě taky trochu rozcuchaná, „ať je to spravedlivý ..." Chtěla ve větě pokračovat, ale jejich rozhovor najednou přerušilo hlasité zařehtání a do místnosti vběhl strakatý hnědák. „Ten je krásnej!" zavolala Bubla a šla ho pohladit.

„Mně přijde nějakej divnej," prohlásil Matěj.

„Co je na něm jako divnýho?"

„Se podívej, jak chodí."

Všichni se zahleděli na hnědáka, který začal zmateně poskakovat po (celém prostoru) místnosti skoky, které nápadně připomínaly písmeno L.

Úloha 2.1. Hnědák si skáče po vnitřku kostky o rozměrech $3 \times 3 \times 3$ krychličky. Jako správný kůň se ovšem umí pohybovat pouze speciálním způsobem. Vždy poskočí o dvě kostky jedním ze tří hlavních směrů a následně o jednu kostku kolmo ke směru předchozího skoku. Kolika způsoby může (v závislosti na tom, kde začíná) proskákat celou kostku tak, aby se v každé krychličce zastavil právě jednou?

„Náhodou, je to moc chytrej koníček," nedala se Bubla a začala ho učit klapat kopyty na prvočísla.

„Co s ním ale?" zeptal se Matěj.

„Mohli bychom si ho nechat," začala žadonit Bubla.

„Nemůžeme si přece nechat koně."

„A to jako proč?"

„Kdo by se o něj staral?"

„Já bych to zvládla!"

„Víš, kolik toho takovej kůň sní?" vysmál se jí Matěj.

Ale Bubla už začala kdesi z komory naštvaně vytahovat přibližně 2019 beden koňského žrádla. Ani si nevšimla, že se na vrchol hromady vydal zjevně zmatený pavouk.

Úloha 2.2. Na věž z 2019 krabic leze pavouk. Každá krabice má tvar krychle. Pavouk začal na spodní straně nejnižší krabice a jeho cílem je dostat se na vrchní stěnu krabice nejvyšší. V důsledku svého zmatení celou dobu leze jen po bočních stěnách, na každou stěnu vleze pouze jednou a nikdy neleze dolů. Kolik různých cest si může vybrat?

BRKOS Team 2019

„A tohle všechno se tu válí snad už od ročníku XIV." sdělila Matějovi Bubla. Začala rovnat krabice zpátky do komory a hnědák ji u toho smutně pozoroval velikýma očima, jako by mu bylo líto, že se hádají kvůli němu.

„Nemůžete se přestat hádat?" zamručel. Ňouma, zjevně naprosto neotřesen mluvícím koněm, se otočil se na Koumu.

„Napadla mě nová hra! Zahraješ si se mnou?"

„Ne, já tady něco počítám," odpověděl Kouma a těkal pohledem mezi blokem a otisky kopyt, které již pokrývaly celou podlahu.

„Zahraješ si se mnou aspoň ty?" otočil se Ňouma na Henryho.

„Jasně," přikývl Henry, který byl vděčný za změnu tématu.

Úloha 2.3. Je dána nekonečná šachovnice a přirozené číslo $n > 1$. Ňouma a Henry spolu hrají hru: střídavě (Ňouma začíná) umísťují na šachovnici dílky n-mina (obdelníky $1 \times n$, kde 1 je velikost jednoho čtverečku na šachovnici) tak, aby každý dílek n-mina zakryl právě n políček na šachovnici a nepřekrýval se s žádným jiným. Ňouma je pořádný a snaží se, aby byla zaplněna celá šachovnice. Henry se mu v tom snaží zabránit a vyhrává tehdy, pokud existuje na šachovnici políčko, které nelze pokrýt dílkem n-mina. Rozhodněte, pro která n má Henry vyhrávající strategii.

„Vyhrál jsem!" zavolal Henry radostně.

„No jo. Ale myslím, že tuhle úlohu nevyřešíš. . . " odpověděl trochu mrzutě Ňouma a ukázal Henrymu svoje poznámky. Hnědák se se zájmem naklonil nad Ňoumův papír a začal ho okousávat.

Úloha 2.4. Ňouma si všiml, že všechny otisky kopyt leží v jedné rovině a na libovolné přímce leží právě 0, 1 nebo 3 otisky (otisky mají velikost bodu). Dokažte, že pokud se otisklo každé ze čtyř kopyt alespoň jednou, tak otisků nemůže být na podlaze konečně mnoho.

Henry i Kouma byli sklonění nad svými papíry a Matěj pořád trochu uraženě pozoroval Liběnku s Ňoumou, kteří si začali hrát s hnědákem. „Aport!" volali na přeskáčku a smáli se.

„Co to tady voní?" otočil se najednou Ňouma. Do pokoje vešla Bubla, která se na chvíli vypařila a nyní nesla tác plný čerstvě upečených koláčů.

„Říkala jsem si, že nám to rozhodování půjde líp s plnými žaludky," usmála se a položila je na stůl. „Tak už se nezlob," řekla Matějovi a omluvně postrčila tác s koláči směrem k němu.

„Vždyť já se už nezlobím," odpověděl Matěj a vzal si jeden koláč. „Klidně si hnědáka můžeme chvilku nechat a pak uvidíme." Podíval se na hnědáka, který si pořád hrál s Liběnkou a vesele řehtal. „Navíc je docela fajn."

Úloha 2.A. Liběnka položila dva koláče o tvaru přesného kruhu na plochý talíř tak, že se dotýkají. Dokažte, že středy koláčů a bod dotyku leží na jedné přímce.

Henry, který byl ještě pořád skloněný nad Ňoumovým příkladem, nepřítomně kousal koláč a zamyšleně se ozval: „Myslím si, že to mám."

„Máš hlavně celý nos od cukru," smála se Bubla.

„Fakt?“ Henry si začal utírat nos a Ňouma se se zájmem zadíval do jeho výpočtů.

„Vymysli teď něco ty mně.“

„No dobře.“ Henry se zamyslel a na tabuli napsal letopočty 2019 a 2020, „zkus třeba tohle.“

Úloha 2.B. V oboru $\mathbb{N}$ řešte rovnici $x^2 + 12x^x - 7x! = 2019^{2020} + 2020^{2019} - 2019 + 2020$.

„To není možné!“ vydechl najednou Kouma, který byl celou dobu potichu.

„Co se stalo?“ Liběnka za ním přiběhla a starostlivě se na něj podívala. Kouma ještě chvíli nevěřícně koukal do svých papírů, načež vítězoslavně zašeptal: „Mám to!“

Po chvíli se ale zarazil. „Ještě ale musím najít tento polynom. . . “ poškrábal se na hlavě.

„Jaký?“ se zájmem se nad výpočty naklonil Matěj. „To je přece jednoduché.“

Úloha 2.C. Matěj začal počítat tento příklad: nechť je zadáno n bodů v rovině s celočíselnými souřadnicemi, přičemž mají navzájem různé x-ové souřadnice. Dokažte, že existuje polynom $p(x)$ s racionálními koeficienty takový, že graf funkce $y = p(x)$ prochází danými n body.

„. . . tak.“ Matěj dokončil výpočet a červenou tužkou obtáhl výsledek.

„A k čemu to je vlastně dobré?“ nechápala Bubla.

„Je to už mnohaletý problém,“ začal vysvětlovat Kouma, „začal jsem se o to zajímat již před nějakou dobou, ale práce šla velmi pomalu. Vědci z Šanganjosechitinské university pracují na jednom z největších vynálezů, které kdy lidstvo přineslo. Jedná se o teleportační zařízení, kterým by bylo možné cestovat po celém světě během pár okamžiků. Ale chyběla mi jedna součástka, která by byla naprogramována určitým způsobem a která by celému výzkumu mohla pomoct. Vypadá to nějak takhle. Počkat. Kde jen jsem to nechal . . . “ začal se přehrabovat v hromadě papírů.

„Tady to je!“ Na papíru byla spousta výpočtů a náčrtků, které byly různě poškrtané a plné různých čísel a barev.

„Ta součástka vypadá nějak takto,“ ukázal na jeden obrázků.

Úloha 2.D. Součástka vznikla takto: nechť je v prostoru dána rovina α. V rovině α nechť je pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$. Uvažme rovinu β, ve které leží úsečka AB a která je kolmá na rovinu α. V rovině β nechť je dán libovolný bod A' takový, že neleží v rovině α. Uvažme obraz šestiúhelníku $ABCDEF$ v posunutí o vektor AA' a označme jej jako $A'B'C'D'E'F'$. Vznikne nám tak těleso $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$. Ukažte, že pokud tomuto tělesu lze vepsat kouli, tak se jedná o pravidelný šestiboký kolmý hranol.

„Týjo,“ hvízdla s uznáním Bubla, „to je zajímavý. A jak že to funguje?“

„To by ale znamenalo, že . . . “ začal Ňouma.

„To znamená,“ přerušil ho Kouma a v očích se mu blýsklo, „že jedeme do Šanganjosechitinu.“

Pokračování v příští sérii.

Svá řešení uploadujte na našich stránkách:
`http://brkos.math.muni.cz/`

BRKOS Team 2019