Milí řešitelé,

Vítáme vás u 26. ročníku semináře BRKOS, který jako každý rok přinese nejen mnoho hodnotných cen, ale také zajímavé matematické a logické úlohy a šanci zúčastnit se dvou soustředění plných přednášek, zábavy a skvělých lidí.

Ať už jste zavítali k úlohám našeho semináře poprvé, nebo jste pravidelnými řešiteli, jsme velmi rádi, že si tyto řádky čtete a doufáme, že si při řešení celého ročníku užijete spoustu zábavy. Přejeme vám hodně štěstí a dobrých nápadů při řešení úloh.

Hodně zdaru přejí

Alča, Danča, Dominik, Honza, Kačka, Linda, Martin, Mája,
Matěj, Matouš, Modrásek, Ondra, 3 × Tom a Vítek

BRKOS Team 2019

Zadání 1. série

ÚVODNÍ GULÁŠ

Termín odeslání: 14. 10. 2019

Text kurzívou není součástí úloh.

V Hloupětíně pršelo a Liběnka dočítala poslední řádky knihy, kterou si Hloupětínští krátili čas: „…A já se jen zasmál a doufal, že její učitelka nikdy nevzplane vztekem.“ „To je hezký příběh, já věděl, že Teodor nakonec svoji dceru najde!“ řekl Kouma. „Kéž by se takové věci děly i v Hloupětíně!“ zoufal si Ňouma a přehrál si v hlavě uplynulý rok, ve kterém se nestalo vůbec nic zajímavého. „Měli bychom s tím něco udělat!“ rozhodla povstalecky Bubla a praštila do stolu tak nešťastně, že by potřeboval slepit.

Úloha 1.1. Bubla potřebuje slepit rozbitý stůl do původního tvaru. Protože ale není moc šikovná s nářadím, může ho opravit pouze pomocí několika thaletací (viz dále). Stůl má vždy tvar mnohoúhelníku. Při thaletaci si Bubla vybere nějakou jeho stranu, nad ní sestrojí thaletovu kružnici a pomocí této kružnice připojí k mnohoúhelníku rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník, takový, že se nepřekrývá s původním mnohoúhelníkem (Například ze čtverce takto může vzniknout pouze "domeček".) Navíc pokud někdy v procesu budou dvě sousední strany svírat úhel 180°, dále s nimi budeme pracovat jako s jednou stranou. Pokud Bubla začíná se stolem tvaru čtverce o straně délky 1, dokáže vytvořit čtverce o straně délky 2, respektive 3, 4 a 5?

„Správně!“ ozval se Henry, „jestli se v tomto proklatém městě budu muset stále koukat na to, jak Bubla píše na tabuli všechna přirozená čísla bez jakéhokoli pravidla, nebo jak Kouma s Ňoumou…“ v tom Henrymu zazvonil telefon, hned ale přestal.„…jak Kouma s Ňoumou…“ zazvonil znovu, pak ještě patnáctkrát, až se vysvětlilo, že si jen Henryho mladší bratr hrál se svým novým telefonem s klasickým číselníkem a Henry má náhodou telefonní číslo dělitelné jedenácti.

Úloha 1.2. Zjistil, že pokud vybere libovolný rovnoběžník, jehož rohy jsou některá tlačítka na klasickém číselníku (viz obrázek) a z těchto tlačítek vytvoří číslo tak, aby pořadí odpovídalo pořadí na obvodu čtyřúhelníka proti směru hodinových ručiček, bude toto číslo dělitelné 11. Umíš to dokázat?

1	2	3
4	5	6
7	8	9
	0	

Příkladem takového čísla je 1705. Platí $1705 = 11 \cdot 155$.

„…zkrátka jestli zas budu koukat na Koumu s Ňoumou, jak hrají hru tak primitivní, že oba už dávno vědí, kdo vyhraje,…“ „Co máš proti našim hrám?“ ohradil se Kouma. „Jo, naše hry nemají chybu!“ přidal se Ňouma. „Hele, Koumo, teď mě zrovna napadla další, pojď.“ Henry se plácl do čela a hoši už kráčeli pomalu k výtahu.

Úloha 1.3. Kouma a Ňouma si postavili výtah, který má nekonečnou šachtu a pouze dvě podlaží vzdálená od sebe 1, a hrají v něm hru. Hra se odehrává v kolech. Každé kolo Kouma řekne nějakou vzdálenost (třeba i iracionální) a Ňouma si v reakci na to vybere jeden ze dvou možných směrů (nahoru, dolů). Pak se s kabinou posunou vybraným směrem o vybranou vzdálenost. Kouma vyhraje, když se mu podaří donutit Ňoumu, aby se dostal do nějakého podlaží. Kde v šachtě se na začátku hry může kabina s hochy nacházet, aby měl Kouma zaručené vítězství bez ohledu na Ňoumova rozhodnutí?

„Co chci říct je, že pokud nebudeme dělat žádné zajímavé věci, stříhat pravidelné 4n-úhelníky a vyplňovat prostory krychličkama, tak nikoho nezaujmeme a propadneme v zapomnění!“ „Na to znám řešení,“ odvětila Liběnka a už sahala po dalším díle skvělé knihy o Teodorovi. „Nenene, Liběnko, na pokračování té knihy bychom se měli dohodnout všichni, dokonce bychom měli zavolat i všechny vážené muže v Hloupětíně!“

Úloha 1.4. Nechť p je liché prvočíslo. V Hloupětíně je $p^2 + p$ vážených mužů, kteří se chtějí rozdělit do klubů. Rozdělují se následujícím způsobem: Každý si vybere některé přirozené číslo n a spočítá svůj identifikační kód jako n^2+n. Při rozdělování pak musí platit, že dva muži jsou ve stejném klubu právě tehdy, když p dělí rozdíl jejich identifikačních kódů. Nechť m značí počet členů klubu, který má nejvíce členů. Určete nejmenší možné m a dokažte, že se jedná opravdu o nejmenší možnou hodnotu.

„Huh, lidi,“ ozval se Matěj, který se do teď válel na gauči a hrál si se čtvercem vepsaným kouli, „nechcete se na tohle všechno vyprdnout? Vždyť tu jde stejně jen o matematiku a když se to polejvá omáčkou, tak je to akorát míň přehledný, říkám vám: Tohle jsou jen kecy, kecy a nic než kecy!“

Úloha 1.A. Čtverec nazvěme mimořádný, jestliže každá jeho úhlopříčka má stejně obarvené koncové body, avšak vrcholy nejsou obarveny všechny stejně.

Ukažte, že na sféře se středem S libovolně obarvené dvěma barvami najdeme vždy čtyři body tvořící čtverec se středem S, který není mimořádný.

„Podívejte!“ Najednou vykřikla Bubla, která celou dobu ze zoufalství hleděla z okna, „Támhle je nějakej mimozemšťan v sombreru a máchá tam kolem sebe nějakou větví, pojďe si s ním pokecat!“„Pozdě Bublo, toho už někdo zpracoval.“ řekl zklamaně Henry. „Tak bychom se mohli zaměřit na ten pařez, kterej stojí vedle něho, ten ve tvaru válce.“ zkusila to znovu Bubla a Henry se zamyslel.

Úloha 1.B. V prostoru je zadán pravidelný čtyřstěn. Kolik existuje "nekonečně dlouhých" válců, které obsahují ve svém plášti všechny 4 vrcholy čtyřstěnu? Dva válce považujeme za různé, pokud mají různé osy nebo poloměry.

„Vždyť se na nás podívejte, jsme z toho všeho úplně zoufalí“, vzala si vůdčí slovo opět Bubla. „Kouma s Ňoumou jezdí stále nahoru a dolů výtahem, Matěj se nezvedne z gauče, Henrymu teče z nosu křivý hlen a Lumír se tváří, jako by tu vůbec nebyl!“„Křivý hlen?“ ozval se Henry, „na tom něco bude,“ a začal vzpomínat, proč je mu to tak povědomé. Jediné, co si však vybavoval, byla tato podmnožina nezáporných celých čísel:

Úloha 1.C. Najděte všechny konečné podmnožiny $S \subset \mathbb{N}_0$ takové, že $S^+ = S^\times$.

Zde S^+ je množina všech takových čísel z $\mathbb{N}_0$, která lze získat jako součet všech prvků některé neprázdné podmnožiny S. Podobně $S^\times$ je množina všech takových čísel z $\mathbb{N}_0$, která lze získat jako součin všech prvků některé neprázdné podmnožiny S.

Tedy pro $S = \{1, 3, 4\}$ dostáváme: $S^+ = \{1, 3, 4, 1 + 3, 1 + 4, 3 + 4, 1 + 3 + 4\} = \{1, 3, 4, 5, 7, 8\}$ a $S^\times = \{1, 3, 4, 1 \cdot 3, 1 \cdot 4, 3 \cdot 4, 1 \cdot 3 \cdot 4\} = \{1, 3, 4, 12\}$.

„Co teda navrhuješ?“ otázala se Liběnka. „Jo,“ přidal se z gauče Matěj, kterému se zrovna odkutálela jeho nová hračka „něco vymysli sama!“„Že bychom si vymysleli vlastní úplně nový příběh?“ zamyslela se Bubla. „Příběh plný emocí, akce a napětí?“ přemýšlela také Liběnka. „Budeš se smát, budeš plakat, změní ti to život?“ nadšeně uvažoval i Henry. „Blbost!“ vykřikl Matěj, vstal a dal Henrymu facku. „Matěji!“ okřikla se Bubla a dala facku Matějovi. Kouma s Ňoumou se začali smát a fackovat se navzájem a chudák Liběnka nevěděla, koho má zliskat ona. Uspořádala proto následující turnaj ve fackování:

Úloha 1.D. Turnaje se účastní $n \in \mathbb{N}$ účastníků, kde každí dva spolu hrají právě jednou. Soupeři si navzájem dávají facky, dokud jeden z nich neomdlí. Tento hráč souboj prohrává. Každý souboj má tedy právě jednoho vítěze a jednoho poraženého. O turnaji víme, že v každé čtveřici účastníků existuje absolutní vítěz nebo absolutní poražený. Absolutní vítěz (respektive poražený) je takový hráč, který porazil všechny ostatní hráče z příslušné čtveřice (respektive je poražen všemi ostatními hráči ze čtveřice).

Na konci turnaje si Liběnka na prázdnou tabuli nakreslila tečku za každého účastníka a přidala šipku mezi každou dvojici teček tak, že vedla od vítěze k poraženému. Kolik existuje možných výsledků turnaje. O dvojici výsledků řekneme, že jsou stejné, pokud lze pro oba výsledky nakreslit stejný obrázek.

Například výsledky turnaje $\{(a, b), (b, c), (a, c)\}$ a $\{(b, a), (a, c), (b, c)\}$ jsou považovány za stejné, zatímco výsledek turnaje $\{(a, c), (c, b), (b, a)\}$ je považován za odlišný (kde (a, b) značí, že a porazil b).

„Co teda budeme dělat?“ Řekli si mezi sebou. Každému se teď totiž zamlouvá něco jiného. Liběnka by chtěla pokračování Teodorova cirkusu času, Matěj by chtěl jen samotné úlohy bez omáčky, Henry by rozvíjel příběhy jiných seminářů, Bubla by si chtěla vymyslet úplně nový příběh a Kouma s Ňoumou by nic neměnili a pokračovali v životu ve Hloupětíně a svých hrách. Nejdůležitější je však názor Vás, řešitelů. Proto Vás prosíme, vyjádřete se do internetové diskuze, jak se vám líbil loňský příběh, předchozí příběhy a co byste rádi viděli v sériích budoucích.

Pokračování v příští sérii.

Svá řešení uploadujte na našich stránkách:
`http://brkos.math.muni.cz/`