Zadání 6. série

Zobrazení v prostoru

Termín odeslání: 13. 5. 2019

Text kurzívou není součástí úloh.

Kapitola VI. Únos

Desátého ledna roku 1827 jsem se rozhodl zkonstruovat stroj času a vrátit se do minulosti, a to proto, abych zachránil svou dceru Agnes, kterou někdo unesl desátého prosince roku 1826. Místo minulosti mě však stroj zanesl do podivného cirkusu, kde mě čekalo mnoho úkolů a hádanek a byl jsem opakovaně přesvědčován, abych se nevracel. Ale teď stojím v pokoji své osmileté dcery Agnes v tu noc, kdy byla unesena. Má cesta je u konce.

„Agnes," oslovil jsem ji jemně a ona jen něco zahuhlala v odpověď. „Agnes vstávej, musíme jít."

„Kam?" zeptala se rozespale.

„Všechno ti vysvětlím, teď prosím vstávej," hlas se mi lámal, jak mi z očí začaly téct slzy radosti z toho, že ji konečně vidím.

„Ughhhh," zahučela Agnes a posadila se na posteli. V prostoru dětského pokoje se pohupovala zářící bublina, díra v čase a prostoru.

Úloha 6.1. Dodnes se ten objekt snažím popsat. Byl středově souměrný, ale nebyl osově souměrný ani rovinově souměrný (rovinová souměrnost je zrcadlení podle nějaké roviny).

„Co to je, tati?" zeptala se zmateně.

„Všechno ti to vysvětlím, ale teď mě chyť za ruku."

Agnes mě rozpačitě vzala za ruku zrovna ve chvíli, kdy se začaly tiše otvírat dveře. Bez rozmyšlení jsme oba skočili do díry v čase. Poslední věc, kterou jsem zahlédl, byl…já. Ta postava, vcházející do dětského pokoje, jsem byl…já. Prostor a čas se sbalil sám do sebe jako když vyfouknete balónek.

Úloha 6.2. S Agnes jsme se ocitli v prostoru nekonečných možností. Byli jsme jako dvě mouchy (body), které poletují v prostoru dřezu. Uprostřed dřezu se nacházela svislá přímka časoprostoru, připomínající vodu tekoucí z kohoutku. Jak jen nalézt nejkratší cestu od jedné mouchy ke druhé mouše tak, aby cestou nabrala vodu (tj. aby cesta protínala přímku)? Dokažte, že jste našli nejkratší.

Když jsme se s Agnes ve všech možnostech času a prostoru opět shledali, ocitli jsme se znovu u brány do Cirkusu, přesně ve chvíli, kdy jsem se loučil s Principálem. Zdálo se, že pro své minulé já jsem neviditelný. Když se minulý Teodor rozloučil s Principálem a odešel do mlhy, otočil se Principál na mě a Agnes.

„Už chápeš, proč jsme tě nechtěli pustit do minulosti?"

V tu chvíli mně vše došlo. Před dvěma lety byla Agnes skutečně unesena, ale byl jsem to já, kdo byl její únosce. Já, který se vracel do minulosti, abych ji zachránil. Čas je jen had, který se kouše do ocasu. Cítil jsem jak mi moje vlastní příčetnost proklouzává mezi prsty, když jsem se snažil pochopit nepochopitelné.

„Teodore, uklidni se!" řekl mi Principál. „Chápu, že není jednoduché to pochopit, ale takhle to je, tohle je realita!"

„Tatínku, já chci domů," zašeptala vyděšená Agnes.

Sebral jsem všechnu sílu a zeptal se Principála: „Kudy se dostaneme zpátky do přítomnosti?"

„Musíš najít portál, bude středově souměrný, osově souměrný, ale ne rovinově souměrný."

„Omezený, nebo neomezený?"

„Na to musíš přijít sám."

Úloha 6.3. Potřeboval jsem dokázat, že v prostoru neexistuje omezený objekt (tj. že neexistuje krabice, do které se objekt celý vleze), který by byl středově souměrný, osově souměrný, ale ne rovinově souměrný (1 bod). Musel jsem tedy popsat neomezený objekt, který tyto souměrnosti splňuje (3 body).

„Pojď Agnes. Všechno ti to jednou vysvětlím." Vzal jsem ji za ruku a pokračovali jsme dál do prostoru, kde býval Cirkus. Stál tu už jen jeden stan, docela vzadu a byl to ten, ve kterém jsem se probudil. Byla stále noc, čas tu očividně neexistoval.

„Tati, kde to jsme?"

Chvíli jsem se zamyslel. „Ve snu. Ve snu, Agnes. Tohle všechno se ti jenom zdá."

Ani mě nepřekvapilo, že když jsme došli ke stanu, nenašli jsme nikoho jiného, než Kryse a Myše, kteří se dohadovali. „Jéje, ty musíš být Agnes!" rozzářil se Krys, když si nás všiml.

„Zdroj všech našich problémů. . . " zabrblal zase Myš.

„Hledáme cestu zpátky," řekl jsem rovnou.

„My zase hledáme zobrazení."

„Lépe řečeno odobrazení."

„Nemať ho, hledáme zobrazení!"

„Abychom se mohli odobrazit. . . "

„Jaké zobrazení?" zeptal jsem se.

Úloha 6.4. Hledáme zobrazení klasického 3D prostoru $f : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ (libovolný bod prostoru zobrazí na nějaký bod prostoru) takové, že pro všechny body $A, B \in \mathbb{E}_3$ platí:

- $|Af(A)| = 1$,
- $\overleftrightarrow{Af(A)} \parallel \overleftrightarrow{Bf(B)} \Leftrightarrow B \in \overleftrightarrow{Af(A)}$.

„Jejda, děkujeme. . . To je zobrazení, podle kterého jsme byli zobrazeni. . . "

„A podle kterého se zase odobrazíme! Rukulíbám, milostpani," oslovil Myš Agnes a smekl neviditelný klobouk. Oba podivní bratři pak na sebe kývli a zmizeli jako když vypustíte vanu.

„A co ta cesta zpátky?" zavolal jsem do nočního vzduchu.

„To nevíme, ale uvnitř tě čeká jedna stará známá. . . " zašeptal vítr v odpověď.

Uvnitř stanu seděla u stolu (který tu předtím rozhodně nebyl) korpulentní zpěvačka Donatella a před sebou měla velkou dřevěnou krabici plnou řasenek.

„No konečně jste tady!“ přivítala nás. „A ty maličká, ty musíš být Agnes, že?“

„Ano prosím,“ odvětila Agnes.

„Zrovna tu mám takovou patálii…“

„MŮŽETE NÁM UKÁZAT CESTU DOMŮ?“ nevydržel jsem to a Donatella chvíli zaraženě mlčela. Potom ale z výstřihu vytáhla nůž, který jsem už měl jednou na krku a jakoby nic ho položila na stůl. „Řekla jsem, že tu zrovna mám takovou patálii.“ V jejím hlase byl smrtelně ledový klid.

„Jakou patálii?“ zeptala se zvědavě Agnes, která se už smířila s tím, že je ve snu.

„Nemůžu najít řasenku s prodlužovacím faktorem milion!“

Rezignovaně jsem si povzdechl. Už jsem se asi naučil snést cokoli.

Úloha 6.A. Donatella měla v krabici řasenky s různými faktory prodlužování. Byla to podmnožina racionálních čísel, ve které leží přirozená čísla 1 až 9 a navíc v ní s libovolnými dvěma jejími prvky (ne nutně různými) leží i jejich podíl. Rozhodněte, zda v této množině leží číslo 1000000, resp. řasenka s tímto faktorem prodlužování.

Upřímně už si nepamatuji, jestli jsme řasenku v krabici našli, nebo nenašli, ale pamatuji si, že Donatella nakonec přece jen vypadala spokojeně. „No výborně! Teď mi prosím odemkněte tenhle náramek a já vám ukážu cestu domů.“ Ukázala nám tlustou ruku, na které byl navlečen stříbrný náramek s ohnivými ornamenty a několikamístným zámkem.

„My ale neznáme kód.“

„To přece nevadí! Principál ho zajistil hádankou, kterou sama nejsem schopná vyluštit, ale ty můj Teodore, Teíčku, Telegrafní sloupíčku to určitě zvládneš.“

„Telegrafní sloupíčku?“

„PROSTĚ HO ODEMKNI!“ zaječela a já byl rád, že v blízkosti není nic ze skla.

Úloha 6.B. Měl jsem před sebou číselný zámek. Měl jsem uvažovat všechny číselné kódy složené z n cifer $0-9$ (můžou začínat i nulou) a ke každému si napsat jeho ciferný součet. Hádanka spočívala v otázce, který ciferný součet jsem napsal nejvícekrát.

Když jsem nalezl odpověď, náramek se s klapnutím odemkl a spadl na zem. „Promiň, já ti totiž pomoci nemůžu. Cestu zpátky zná jenom moje sestra,“ omluvila se Donatella a vzplála. Držel jsem Agnes pevně za ruku, aby neutekla. Tohle už musí být skoro konec. Přede mnou stanula nádherná, ale smrtící Akrobatka, se kterou jsem již měl tu čest. Opět stála celá v plamenech, ale zdálo se, že tentokrát se drží zpátky. Nakreslila do vzduchu ohnivou čáru. „Pověz Teodore, není tahle čára ÚŽASNÁ?“

„To nevím, je to jenom…“

„A co tenhle čtverec? Je ÚŽASNÝ?“ Udělala z čáry čtverec.

„Já nevím…“

„TY NIC NEVÍŠ, A PROTO TĚ SPÁLÍM NA-“

„Tak počkat,“ přerušil jsem ji. „Co myslíš tím, že je něco ÚŽASNÉ?“

„Aha,“ zarazila se. „To jsi měl říct rovnou.“

Úloha 6.C. O úsečce AB řekneme, že je *ÚŽASNÁ*, pokud na Thaletově kružnici nad AB existuje bod C splňující, že délky $|AC|$ a $|BC|$ jsou celočíselné. O čtverci řekneme, že je *ÚŽASNÝ*, pokud jeho obsah je celočíselný a dokonce sudý. Akrobatka chtěla, abych dokázal, že *ÚŽASNÝ* čtverec má *ÚŽASNOU* stranu právě tehdy, když má *ÚŽASNOU* úhlopříčku.

„No to je úžasné," usmála se Akrobatka a úplně přestala hořet. „A teď je čas jít domů. Sbohem Teodore, sbohem Agnes."

„Sbohem," ozval se ve vzduchu ještě jeden hlas, v kterém jsem slyšel Kryse i Myše, Donatellu, Principála, Architekta i Hada. Budou mi chybět? V žádném případě.

„Sbohem!" zavolal jsem. „Rozluč se, Agnes. Jdeme domů."

„Na shledanou," řekla Akrobatce.

** * **

Z našeho dobrodružství v Cirkusu času se v průběhu let stala pouhá legenda. Já se postupně smířil s tím, že jsem únosce i zachránce své dcery v jedné osobě a s velkou výpomocí Alexandra (který mi jako jediný uvěřil), jsme vymysleli poněkud uvěřitelnější verzi celého příběhu. Agnes byla dva roky unesena neznámým člověkem, který ji poté z neznámých důvodů vrátil. To jsme alespoň řekli ve škole, na policii a všem našim známým. Doufali jsme, že si nikdo nevšimne, že za tu dobu nezestárla ani o den. Tetování na mém předloktí zůstalo. Deset. Dvanáct. Osmnáct. Dvacet šest.

Aby Agnes mohla zůstat ve třídě se svými spolužáky, musel jsem ji doučovat, co zameškala. Jednoho dne donesla těžký bonusový úkol:

Úloha 6.D. Nechť a, b, c jsou strany trojúhelníka, α, β, γ jsou úhly u vrcholů v tomto trojúhelníku. Ukažte, že

$$\frac{a^2}{2bc} + \frac{b^2}{2ca} + \frac{c^2}{2ab} \geq \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma.$$

A když jsem se podivil, že je to snad trochu těžké pro studentku sedmé třídy, řekla: „Skoro jako od Akrobatky, že?" A já se jen zasmál a doufal, že její učitelka nikdy nevzplane vztekem.

Konec.

Svá řešení uploadujte na našich stránkách:
`http://brkos.math.muni.cz/`