Zadání 5. série

Uspořádání

Termín odeslání: 8. 4. 2019

Text kurzívou není součástí úloh.

Kapitola V. Had, který se kouše do ocasu

Desátého ledna roku 1827 jsem se rozhodl zkonstruovat stroj času a vrátit se do minulosti. Jenže jsem zapomněl, kam se vlastně chystám a co tam hodlám udělat. Teď jsem však prozřel. Jmenuji se Teodor a vracím se v čase, abych zachránil svou dceru Agnes, kterou někdo unesl desátého prosince roku 1826. Pořád si ale nejsem jistý, kam jsem se to vlastně dostal. Ocitl jsem se totiž v podivném cirkusu, kde nic nedává vůbec žádný smysl. Teď se mi konečně podařilo najít východ a zdá se, že Cirkus se za mnou propadl do země. Zdálo se, jakoby se mě Principál před odchodem snažil před něčím varovat. Byla to pravděpodobně jenom další zkouška. Vrátím se teď do minulosti a všechno, co se stalo, napravím.

Kráčel jsem nyní mlhou tak hustou, že se zdálo, jakoby se celý svět proměnil v šeď. I tráva pod mýma nohama se zdála být šedá. A něco se v ní – Sehnul jsem se zvedl a ze země kompas. Byl docela obyčejný. Červená ručička ukazovala na sever.

„Já už mám tři!“ ozval se za mnou známý hlas.

„Ha! Pěkně kecáš!“ Z mlhy se vynořili Krys a Myš, jednoruká dvojčata, se kterými jsem měl tu čest ještě v Cirkusu. Oba nesli několik kompasů, které ukazovali sever na různé strany a byli různě zdobené. „Ty se tu jenom tak válí?“ zeptal jsem se.

„No jasně!“ zasmál se Krys. „A čím víc jich máš, tím víc víš!“

Úloha 5.1. Já, Krys a Myš jsme se dali do hledání kompasů. Některé jsme nacházeli vícekrát. Na konci jsme porovnali, kdo ví víc, přičemž A prý ví víc, než B, má-li A všechny kompasy, jako B, a ještě nějaké navíc. (Tedy např. když dva lidi mají úplně jiné kompasy, jsou v tomto směru neporovnatelní, tedy nemůžeme říct, kdo ví víc.) Přemýšlel jsem, jak můžou vypadat všechny situace, ve kterých vím víc než Krys a ve kterých žádní dva z nás nemají právě ty stejné kompasy.

„Haha, ale stejně toho pořád víme jen hodně málo!“ řekl Myš.

„Vy dva jste mi opravdu nechyběli,“ poznamenal jsem cynicky. Neměl jsem nejmenší tušení, jestli nechodíme v kruhu, ale v tom jsem si všiml, že do trávy na zemi jsou v pravidelných intervalech vyznačeny čáry bílým pudrem. Chodili jsme po čtvercové síti.

„Třetí je vždycky nejsnadnější ztratit,“ prohodil Myš.

„Třetí co?“

„Rozměr–“

„Chtěli jsme s Myšem na Vánoce supremum,“ přerušil ho Krys.

„Skutečně?“ odsekl jsem.

„A tak nám Had nakreslil tuhle čtvercovou síť a řekl, že to je ono.“

„Jenomže nevíme, co je to supremum a tudíž nevíme, jestli jsme to dostali!“

Úloha 5.2. Představil jsem si S jako množinu všech čtverců nakreslených na zemi a řekl jsem si, že jejich rohy mají zajisté celočíselné souřadnice. Potom jsem se rozhodoval a dokazoval, zda pro každou dvojici čtverců a, b existuje jejich supremum vzhledem k $\subseteq$, tj. zda pro každé dva čtverce a, b existuje čtverec c takový, který obsahuje a i b a zároveň každý další čtverec, který obsahuje a i b, obsahuje i c (tedy čtverec c je jediný nejmenší obal čtverců a, b).

„Tak počkat,“ zarazil jsem se. „Kdo je Had a co po mě bude chtít?“

„Had, který se kouše do –“ chtěl říct Myš, ale Krys ho bolestivě štípl do ramena. „Už musíme jít!“

Než jsem se stihl zeptat kam, Krys i Myš zmizeli v mlze, stejně jako se objevili. Sám jsem dál odhodlaně kráčel mlhou, která podle všeho nikam nevedla. A byla bělejší a bělejší a tráva pod mýma nohama byla jemnější a jemnější, až jsem si nebyl jistý, jestli mlhou jdu, letím, nebo plavu.

„Pozor Teodore, přicházíš o druhou dimenzi,“ zasyčel mi někdo rovnou do ucha. Chtěl jsem se otočit, ale nějakým podivným způsobem to nešlo. Nebyl to problém s otočením hlavy, byl to spíš problém s tím, že už jsem podle všeho žádnou hlavu neměl. Když kolem mě proletělo první racionální číslo, uvědomil jsem si, že jsem byl redukován na jedinou dimenzi. Stal jsem se číslem.

Úloha 5.3. Množina, ve které jsem se nacházel, měla n prvků. Dělalo se mi špatně z abstraktní neurčitosti kolem mě, tak jsem začal hledat podmnožiny, kterých bych se mohl zachytit. Musel jsem však nejdřív přijít na toto: Kolik nejvíc podmnožin můžu vybrat tak, aby žádné dvě mnou vybrané podmnožiny nebyly porovnatelné vzhledem k inkluzi? (Tedy pro žádné dvě podmnožiny nemůže nastat, že jedna je podmnožinou druhé nebo druhá první.)

„Neboj, tohle je jenom dočasné,“ řekl hlas. „Teď máš největší abstrakci, jakou jsi kdy zažil. Za chvíli se ti rozměry začnou vracet.“ Chtěl jsem něco namítnout, ale nemohl jsem, protože jsem byl číslo. Cítil jsem, že každou chvíli ztratím poslední špetku svého vědomí a vyrvu se z pout jakékoli racionality. Cítil jsem jak ztrácím kontakt s číselnou osou.

„Nevzdávej to! Soustřeď se!“ povzbuzoval mě hlas. Napnul jsem všechny své číselné svaly, umístil se do zlomku a potom se zaokrouhlil a stal se svou absolutní hodnotou.

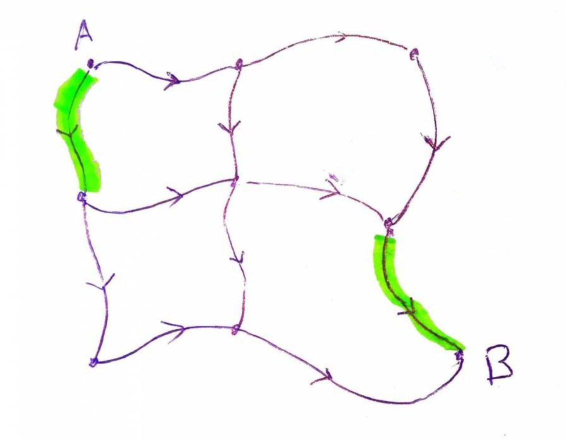
Úloha 5.4. Ulevilo se mi, když jsem zjistil, že jsem součástí množiny přirozených čísel. Rozhodl jsem se uspořádat ji (čili nalézt uspořádání, viz pomocný text) tak, aby existovalo nekonečně mnoho čísel, které nejsou minimální (je ještě nějaký prvek před nimi), ale zároveň nemají bezprostředního předchůdce. Bezprostřední předchůdce prvku A je prvek B, který je „hned“ před prvkem A, tzn. neexistuje žádný další prvek C (mimo A a B), který by byl v uspořádání před A a zároveň za B. Formálně zapsáno:

$$B \text{ je b.p. } A \Leftrightarrow B \sqsubseteq A \wedge \nexists X (B \sqsubset X \wedge X \sqsubset A).$$

(Bonus za pátý bod, bez této části můžete dostat maximálně čtyři) Našel jsem takové uspořádání, které splňovalo předcházející a navíc bylo lineární (čili každé dva prvky spolu lze porovnat) a každý prvek měl bezprostředního následníka (bezprostřední následník je definován podobně jako předchůdce).

Být součástí uspořádané množiny mi dodávalo jistotu. Než jsem se nadál, svět čísel se zatřásl, osa na které jsem balancoval, se rozdvojila a já se znovu ocitl v rovině.

Úloha 5.A. Nacházel jsem se teď na mapě neznámého města. Síť křižovatek a jednosměrek vypadala jako na tomto obrázku:



Právě dvě z jednosměrek (ty vyznačené v obrázku) byly slavnostně vydlážděné. Každá jednosměrka měla nějakou neznámou délku. Zjistil jsem však, že pokud budu chtít jet z A do B a nikdy nepojedu v protisměru, tak když pojedu libovolnou cestou, která začíná vydlážděnou jednosměrkou, ujedu stejnou vzdálenost, jako když pojedu cestou, která končí vydlážděnou jednosměrkou. Nevěděl jsem, kudy se dát, ale zkusil jsem dokázat, že jsou všechny cesty z A do B stejně dlouhé.

V bodě B byl jen trojúhelník. Žádný Had, žádný cirkus, žádná cesta do minulosti. „Zbláznil jsem se?“ zeptal jsem se smutně a dvojrozměrně.

„Nezbláznil, už jsi skoro na konci své cesty,“ odvětil syčivý hlas.

„To si myslím od chvíle, co jsem vstoupil do stroje času,“ zachmuřil jsem se. „Možná lidem prostě není souzeno, aby měnili nezměnitelné.“

„Ne, obyčejným lidem skutečně ne.“

„A já jsem neobyčejný?“

„Teodore bude se nám povídat mnohem lépe až budeme mít oba tři rozměry.“

„Určitě,“ řekl jsem kvapně. „Co mám udělat?“

Úloha 5.B. „Vidíš před sebou trojúhelník ABC?“

„Ano.“

„ Na straně a jsou dány body A_1, A_2, na straně b body $B1$, $B2$ a na straně c body C_1, C_2 tak, že dva body na jedné straně jsou vždy stejně vzdálené od jejího středu.“

„Ano, vidím.“

„Čtyřúhelníky $A_1A_2B_1B_2$, $B_1B_2C_1C_2$, $A_1A_2C_1C_2$ jsou tětivové (lze jim opsat kružnice), je to tak?“

„Ano.“

„Dokaž, že všech šest bodů leží na jedné kružnici.“

Chvíli jsem zápolil s důkazem, ale nakonec se mi to konečně povedlo. „Tak a teď ji zkus roztočit podél jejího průměru.“ Sebral jsem všechnu odvahu k tomu, abych porušil pravidla *roviny, ve které jsem se nacházel, a šťouchl do kružnice. Ta se pomalu roztočila a postupně nabírala otáčky, až se z ní stala mihotavá koule.*

„A teď?" zeptal jsem se stále uvězněný ve dvou dimenzích.

„Teď si zacpi uši." Koule praskla jako bublina a chvíli bylo úplné ticho. Potom se se zvukem, jako když se tříští deset miliónů sklenic o dlážděnou podlahu, roztříštilo mé dvojrozměrné vězení a já se vrátil do trojrozměrné reality. Stál jsem jen několik metrů od brány z cirkusu a díval se přímo do očí obrovskému hadovi. Měl spíš velikost vlaku, než jakéhokoli zvířete a obtáčel se kolem celého cirkusu. Jeho šupiny se leskly ve vycházejícím slunci. Zdálo se, že končí tahle nekonečná noc.

„Co to všechno bylo?" zeptal jsem se Hada a ani sekundu jsem nepochyboval o tom, že to byl on, co se mnou celou dobu mluvil.

„Čas je jenom matematika. Když cestuješ časem, cestuješ jednou dimenzí. Museli jsme tě trošku... Smrštit, aby ses vešel."

„Takže tohle byla cesta časem?"

„Více méně."

„A teď?"

„Teď zachráníš Agnes. Ale ještě než půjdeš..."

„Ano?"

„Nezahrál by sis se mnou hru? Je to už hodně dávno, co jsem si naposledy mohl vytáhnout ocas z pusy."

„Poslední hru?" zeptal jsem se podezřívavě.

„Úplně poslední."

Úloha 5.C. S Hadem jsme hráli poslední hru. Postupně jsme se střídali v kreslení kruhů do písku. Nový kruh se vždy musel dotýkat vnějším dotykem alespoň jednoho stávajícího kruhu, nejvýše však tří, a žádné dva kruhy nesměly sdílet nějakou oblast s nenulovým obsahem. Vítězí ten, jehož kruh způsobí, že všechny kruhy mají celkem devět průsečíků. Kdo má vyhrávající strategii, jestliže začíná Had? Jaká je to strategie?

„Čas se naplnil," řekl jsem a Had se mému vtipu od srdce zasmál. „Mám ale ještě jednu otázku."

„Jakou, Teodore?"

„Pokud je čas jenom matematika, jak to, že se v něm dá cestovat a měnit jeho pravidla?"

Úloha 5.D. „Nechť p je prvočíslo. Ukaž mi, že rovnice $x^p - y^p = p$ nemá celočíselná řešení x, y."

Odpověděl jsem hadovi důkazem.

„Kdyby jsi chtěl skutečně změnit něco, co se stalo v minulosti, bylo by to jakoby jsi chtěl najít celočíselné řešení této rovnice."

„Počkat, tomu nerozumím..."

„Nemožné."

„Ale..."

„Nic co se jednou stalo, se nemůže odestát. Vesmír by se sesypal jako domeček z karet."

„Ale říkal jsi, že..."

„Sbohem Teodore. A nebuď na sebe moc tvrdý," řekl Had s vážnou tváří a zakousl se sám sobě do ocasu tak bolestivě, že mu z očí vyhrkly slzy. Čas se obrátil jakoby to byly jen

přesýpací hodiny a prostor se posunul s hladkostí plachtícího ptáka. Bylo desátého prosince roku 1826 a já stál v pokoji své nejdražší Agnes.

Pokračování v příští sérii.

Svá řešení uploadujte na našich stránkách:
`http://brkos.math.muni.cz/`