



Zadání 4. série
KOMBINATORIKA

Termín odeslání: 18. 2. 2019



Text kurzívou není součástí úloh.

KAPITOLA IV.: PRINCIPÁL

Desátého ledna roku 1827 jsem se rozhodl zkonstruovat stroj času a vrátit se do minulosti. Jenže jsem zapomněl, kam se vlastně chytám a co tam hodlám udělat. Teď jsem však prozřel. Jmenuji se Theodor a vracím se v čase, abych zachránil svou dceru Agnes, kterou někdo unesl desátého prosince roku 1826. Pořád si ale nejsem jistý, kam jsem se to vlastně dostal. Ocítl jsem se totiž v podivném cirkusu, kde nic nedává vůbec žádný smysl. Mám však fotku a náhrdelník své dcery a v kapse revolver, který se nebojím použít.

Když jsem Akrobatce dokázal, že vím kdo jsem a kam vlastně mířím, usmála se a během okamžiku se proměnila zpátky do podoby obtloustlé operní zpěvačky jménem Donatella.

„Pojď se mnou,“ řekla prostě a já se vydal za ní po cestičce mezi cirkusovými stany. Byla stále noc. Podivné. Dovedla mě až ke stanu, který byl jiný než všechny ostatní. Byla to vlastně velká vila, ale místo zdí měla pruhované cirkusové plátno, do kterého byla na několika místech vsazená bílá okna. Donatella mi naznačila, že mám jít dovnitř, a pak se otočila a neohrabaně odběhla. Otevřel jsem dveře a ocítl se ve velkém tanečním sále. Působilo prázdně a mrtvě, uprostřed stála šachovnice na kovaných nohách, ale kolem ní žádné židle.

ÚLOHA 4.1. Na šachovnici 8×8 se v protějších rozích nacházeli černý a bílý kůň. Střídali se v tazích, přičemž černý kůň začínal. Pohybovali se jako klasičtí šachoví koně. Napadlo mě: Může někdy černý kůň skočit na políčko, na kterém se nachází bílý kůň?

Byl jsem tak fascinovaný šachovnicí, že jsem si ani nevšiml, že do místnosti někdo vešel. Byl to asi desetiletý chlapec v naškrobeném obleku se zlatým cylindrem na hlavě. Spatřil jsem ho, až když mě oslovil. „Vítej, Theodore,“ řekl dětským hláskem a dramaticky zatleskal rukama. Taneční sál se rozzářil barvami.

ÚLOHA 4.2. Do dřevěné podlahy se vypálila kružnice o poloměru 2019. Na parketu se následně objevilo 2019 tanečnicků, z nichž každý se pohyboval v kruhu, který ležel ve vnitřní oblasti vypálené kružnice. Každé dva kruhy měly nejvýše jeden společný bod, a kromě tohoto bodu měly prázdný průnik. Hned jsem si všiml, že součet poloměrů tří nejmenších kruhů je vždy menší než 135. Přemýšlel jsem však, jak to dokázat.

Malý chlapec mi podal ruku, zatímco na parketu se na první pohled chaotickým pohybem

otáčeli barevní tanečníci. Všiml jsem si, že nemají obličej a vlastně ani těla, byly to jen tančící oděvy. „Jsem Principál. Mám obrovskou radost z toho, že se konečně setkáváme.“

„Nápodobně,“ odvětil jsem a podal jsem malému chlapci, tedy Principálovi, ruku. Snažil jsem se nedat najevo překvapení z toho, že tento cirkus řídí někdo, komu je deset let.

„Potřebuji se vrátit do desátého prosince roku 1826,“ vyhrkl jsem, protože jsem přišel na to, že v Cirkusu se vyplatí vyjevit své záměry předem.

„To probereme u mě v pracovně. Kouříte?“ zeptal se a vydal se přímo na opačný konec sálu. Tanečníci se mu obloukem vyhýbali.

„Ne děkuji,“ odvětil jsem. Došli jsme až do jeho pracovny, kde si Principál zapálil doutník. Byla to pracovna úspěšného, bohatého, ale hlavně dospělého muže. Cítil jsem se nesvůj.

„Hrajete hry?“

„Nepříliš rád.“

„Budete mít úkol a já se vám ho budu snažit překazít, to je hra, co si teď zahrajeme,“ řekl tajemně.

ÚLOHA 4.3. Principál rozložil na stůj nekonečný čtverečkovaný papír. Já jsem měl zapisovat křížky, on kolečka. Ve svých tazích jsme se pravidelně střídali přičemž jsem začínal já. Principál mi vysvětlil, že vyhraji právě tehdy, pokud se na papíře bude nacházet obdélník o rozměrech 4×5 , v jehož rozích se budou nacházet křížky (x -ová souřadnice rohů obdélníku se tedy musí lišit o 3 a y -ová o 4). Po chvíli hraní se mi však něco nezdálo. Zkusil jsem dokázat, že má Principál takovou strategii, že bez ohledu na to, jak hraji já, mě nikdy nenechá vyhrát.

„Jsem rád, že jsi na to přišel,“ sdělil mi Principál, „uvědomuješ si, co to pro tebe znamená?“

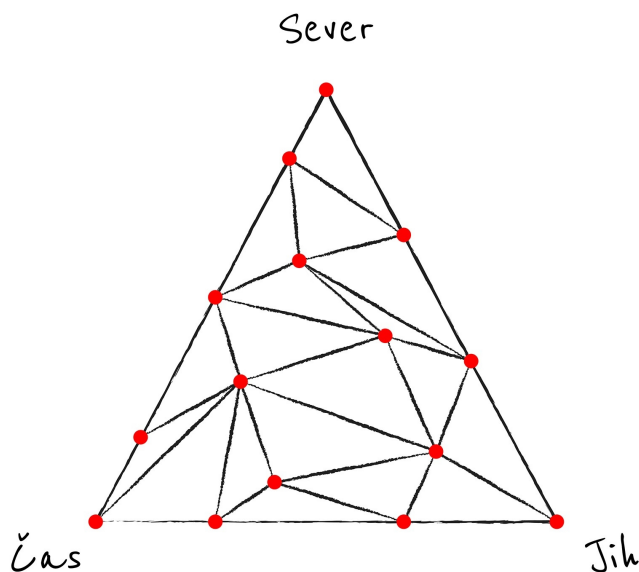
„Že to, jestli se budu moct vrátit, je zcela na vás?“

Principál se zasmál, jako bych řekl tu největší hloupost. „Kolik toho víš o tom, kde vlastně jsi?“

Chvilí jsem se zamyslel a pak jsem mu odpověděl: „Myslím že tohle je něco jako přestupní stanice v čase, způsob, jakým se moje mysl vyrovnává s paradoxem.“

„Dobrý odhad, Theodore. Je to trochu složitější.“

ÚLOHA 4.4. „Svět, kde se teď nacházíš, je trojúhelníkový, má tedy jen tři světové strany: Sever, Jih a Čas. Politicky je tento svět rozdělen na severní, jižní a časové mocnosti. Cirkus leží na jednom z Trianglových ostrovů, které jsou rozděleny do trojúhelníkových provincií a v každém vrcholu provincie se nachází město. Jeden z ostrovů vypadá například takto.“ Principál nakreslil na papír obrázek. „Každé město ovládá jedna ze tří mocností. V nejsevernějším městě každého z ostrovů sídlí Severní mocnost, v nejjižnějším městě Jižní mocnost a v nejčasovějším městě Časová mocnost. V městech severojižního pobřeží sídlí sever nebo jih. Obdobně to platí pro severočas a jihočas. O vnitrozemských městech nic nevíš. Dokaž mi, Theodore, že na každém ostrově existuje provincie v jejíž vrcholech leží města všech tří mocností.“



„Cirkus je test toho, jestli chápeš následky své cesty časem a prostorem a jestli pro ni máš dobrý důvod,“ shrnul Principál.

„Chci zachránit svou dceru, to je snad dostatečný důvod!“ rozzlobil jsem se.

„Otevřel jsi díru v čase,“ řekl Principál, a když mávl rukou, doprostřed stolu se vypálila zdánlivě nekonečně hluboká obdélníková díra, „ale Cirkus je jako hlídací pes, kterého nezajímá, co chceš dělat v území, které hlídá.“ Na stole se zhmotnila pouliční lampa, ke které byl přivázaný černý dobrman.

ÚLOHA 4.A. Uprostřed stolu byla nekonečně hluboká díra o rozměrech 10×20 centimetrů. Na jejím okraji se nacházel plot. K lampě umístěné uprostřed kratší strany díry byl přivázan hlídací pes na řetězu dlouhém 30 centimetrů. Přemýšlel jsem: Jak velká je plocha území, které může pes hlídat (kam až mu dovolí řetěz), aniž by spadl do díry?

„Nerozumím tomu, co po mně vlastně chcete. Jste pořád jen samé hádanky a úkoly a já už vlastně nevím, jestli to vůbec někam vede.“ Zatímco jsem mluvil jsem nenápadně nahmatal revolver v pravé kapse u kalhot.

Principál ihned zpozorněl. „Theodore proč nám rodiče zakazují abychom strkali ruce do ohně?“ Hlídací pes zmizel i s lampou a díra ze změnila v kostkovaný kobereček.

„Kolik existuje možností toho, co se mohlo stát v minulosti?“ pokračoval Principál.

ÚLOHA 4.B. Kobereček na stole teď nabíral všechny možné rozměry. Všiml jsem si, že jeho strany jsou však vždy taková přirozená čísla a a b , že $\frac{a}{b}$ je zlomek v základním tvaru. Svíraje v ruce revolver jsem zkusil najít všechna reálná c taková, že na koberečku o stranách a a b tvořila kostkovaný vzor s kostkami o straně c (tedy koberec šel vydláždit čtverci o straně c). Nesmím zapomenout dokázat, že jsou skutečně všechna, pomyslel jsem si.

„Ne, Theodore, existuje právě jedna varianta minulosti a to musíš pochopit,“ zasmušil se Principál a mně už došla trpělivost, a tak jsem na desetiletého chlapce (který byl očividně

jen další hříčkou), namířil revolver.

Vypadal, že ho to nepřekvapilo. Jediné co řekl bylo: „Hodně štěstí.“ A pak se se mnou celý svět roztočil a já stál najednou venku mezi stany a všude byl slyšet otřesný rámus a všechny stany se začaly propadat do země.

Náhle bylo ticho. Jako vězeň věčné noci, jež tu vládla, jsem stál uprostřed obřího oploceného kruhu, kde už nestál jediný stan. V trávě na zemi byly vyšlapané cestičky a nakreslené křídlové kruhy na místech, kde stany stály. Vydal jsem se k cirkusové bráně, kterou jsem zahlédl v dálce. Mizela v mlze.

Zatímco jsem k ní krácel, přemýšlel jsem, jestli jsem neudělal chybu ve svých výpočtech. Cestování časem možná přece jen možné není. Možná jsem zešlel.

ÚLOHA 4.C. Vybavila se mi soustava, na které jsem byl několik dnů zaseknutý. Možná právě v ní jsem udělal chybu. V hlavě jsem ji vyřešil pro $x, y, z \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}x(x^2 - y^2 - 3) + xz - yz &= 2 \\y(x^2 - y^2 - 3) - xz + yz &= 2 \\(x - y)(x^2 - y^2 - 3) + 6(x - y) &= -2.\end{aligned}$$

Brána ven z cirkusu byla obyčejná, bez ozdob a bez jediného nápisu. Za ní byla jen mlha a prázdnota. Vzal jsem za kliku. K mému překvapení brána nebyla zamčená. Tady to asi skutečně končí. Někdo si odkašlal. O bránu byl opřený desetiletý Princípál a kouřil.

ÚLOHA 4.D. „Ukaž mi, že každé přirozené číslo lze zapsat jako rozdíl dvou přirozených čísel, které v rozkladu na prvočinitele mají stejný počet různých prvočísel.“

Nasupeně jsem mu sdělil odpověď. „A co máte pořád s tou matematikou?“ zeptal jsem se ho.

„Čas je matematika. Nepochopíš čas, pokud nechápeš matematiku.“

„Copak já nechápu matematiku?“

„Umíš matematiku. Ale nechápeš ji.“

„Tak proč mě pouštíte?“

„Tvrdohlavé děti musí někdy rodiče nechat strčit ruku do ohně.“

Bez odpovědi jsem otevřel bránu a vykročil jsem se do mlhy.

Pokračování v příští sérii.

Svá řešení uploadujte na našich stránkách:

<http://brkos.math.muni.cz/>