

## Milí řešitelé,

Třetí série se věnuje racionálním a iracionálním číslům, tzn. rozlišujeme, která čísla umíme napsat jako zlomek, a která ne. Určitě umíme všechna celá čísla napsat jako zlomek (se jmenovatelem jedna), naopak hezkými příklady iracionálních čísel jsou třeba  $\sqrt{2}$ ,  $\pi$  nebo Eulerovo číslo  $e$ . Více si počtete ve studijním textu.

Pozornost věnujte také plánovanému zimnímu soustředění, jehož termín jsme předběžně stanovili na 4. 2. — 9. 2. 2019. Více informací sdělíme později.

Nakonec se musíme omluvit za špatnou kvalitu tisku vašich řešení, přes prázdniny se u nás na fakultě změnilo více věcí než jen BRKOS a způsobilo nám to mírné komplikace. Nicméně s opravováním další série se polepšíme.

Nezapomeňte odevzdat i druhou sérii. Přejeme vám hodně štěstí a dobrých nápadů při řešení úloh.

Hodně zdaru přeji

*Alča, Barča, Dominik, Minh, Linda, 2 × Martin,  
Matěj, Matouš, Ondra, 3 × Tom, Viki, Vítek a Vojta*



Zadání 3. série

# RACIONÁLNÍ & IRACIONÁLNÍ ČÍSLA



Termín odeslání: 14. 1. 2019

**Text kurzívou není součástí úloh.**

## KAPITOLA III.: ZKOUŠKA OHNĚM

*Desátého ledna roku 1827 jsem se rozhodl zkonstruovat stroj času a vrátit se do minulosti. Teď si ale sám nejsem jistý, kam jsem se to vlastně dostal. Ocitl jsem se totiž v podivném cirkusu, kde nic nedává vůbec žádný smysl. Podařilo se mi však získat krabičku s fotografií, náhrdelníkem a revolverem a při pohledu na tyto věci jsem si alespoň vzpomněl na to, kdo jsem.*

*Vyšel jsem tedy z jednoho z cirkusových stanů ven, kde byla pořád noc a nikde ani živáčka. Jemně tu vonělo pálící se dřevo. Z ničeho nic z protějšího stanu vyběhla tlustá nalíčená dáma v obrovských černých šatech a obořila se na mě: „Mé jméno je paní Donatella, víte vy vůbec, kdo já jsem?“*

*„Někdo kdo mi ukáže východ?“ zeptal jsem se paní Donatelly unaveně.*

*„Ne. Jsem největší operní pěvkyně časoprostoru.“*

*„Největší?“ Pousmál jsem se při pohledu na její korpulentní postavu.*

*„PROSÍM?“ zaječela Donatella, z výstříhu vytáhla nůž a přiložila mi ho na krk. „Tak a teď mi pěkně řeknete, co jsem. Začíná to na J a končí na A a taky je to číslovka a není to jedenáctka. Nebo vás zavraždím.“*

*„Jednička?“ pípl jsem k smrti vyděšený.*

*Donatella přitiskla nůž pevněji. „Správně. A kdyby jste to měl poskládat z dvojky a trojky?“*

*Chvilí jsem nechápal, ale pak jsem zmateně řekl: „Tak bych odečetl tu dvojku od trojky abyste byla. . .“*

*„Jednička! Ano, správně. A kdyby jste to měl poskládat z  $n/(n+1)$  a  $(n+1)/(n+2)$ ?“ Stále mi držela nůž na hrdle.*

**ÚLOHA 3.1.** Mám k dispozici  $n/(n+1)$  a  $(n+1)/(n+2)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . A taky nůž na krku. Pomocí konečného počtu sčítání a odčítání potřebuji dostat jedničku.

*„No výborně, já věděla, že budeme kamarádi.“ Donatella si schovala nůž do výstříhu stejně rychle, jako ho vytáhla. „S někým vás seznámím Theodore!“ Paní Donatella mě popadla za ruku a vtáhla do stanu, který se ukázal být její šatnou. Všude byly křesílka, pohovky, kytice a bonboniéry, jen uprostřed byl stůl, na kterém stálo velké čtvercové zrcadlo. „Než se rozezpívám, můžeš mi pomoci s křížovkou,“ a mrštila po mně noviny na kterých byla nalistovaná pasáž s křížovkou.*

**ÚLOHA 3.2.** Křížovka, kterou po mně Donatella hodila, byla matematická. Poslední chybějící pojem je „nejmenší kladné celé číslo  $n$  takové, že  $\sqrt{2n}$ ,  $\sqrt[3]{3n}$ ,  $\sqrt[5]{5n}$  jsou přirozená“.

*Když jsem přišel na odpověď, zeptal jsem se: „Co je tohle za křížovku?“*

*„Jsem sice jednička, ale taky MATEMATIČKA,“ zazpívala Donatella tak, že mi málem praskly ušní bubínky. „Jaká je tajenka?“*

*„Deset, dvanáct, osmnáct, dvacet šest,“ přečetl jsem a upustil noviny na zem, když jsem si uvědomil, že jsou to ta stejná čísla, která mám vytetovaná na ruce.*

*„Připraven?“ zeptala se náhle.*

*„Na co mám být...“ Ani jsem nestihl dořít větu a Donatella vydala odporný vysoký zvuk vzdáleně připomínající zpěv tak nahlas, že i když jsem si zacpal uši, podlomila se mi kolena. Zrcadlo se roztříštilo a vyšlehl z něho plamen, od kterého vzplál celý stan a najednou bylo všude nesnesitelné horko. Donatelliny šaty okamžitě shořely a spolu s nimi shořelo i všechno, co jsem myslel, že je jejím tělem. Na jejím místě zůstala stát mladá akrobatka v černém trikotu s flitry a v očích se jí zrcadlil okolní plamen.*

*„Vítej, cestovateli. Donatella by mě určitě ráda představila, ale takové věci se dělají těžko když sdílíte jedno tělo.“ řekla sametovým hlasem. Nebyl jsem schopen jediného slova. „Jak jsem si myslela,“ pokračovala akrobatka. „Jsi slabý, hloupý, nevíš ani pořádně za kým se vracíš. Takže shoříš,“ prohlásila jednoduše a zdvihla paži.*

*„Nejsem hloupý, dostal jsem se až sem!“ vykašlal jsem ze sebe obtížně. Všechny květiny i bonboniéry už dávno shořely, z pilin na zemi se stal popel.*

**ÚLOHA 3.3.** „Nechť  $m, n$  jsou nesoudělná celá čísla,  $n$  je různé od nuly,  $k \in \mathbb{Z}$ . Označme

$$A_k = \{a + b\sqrt{k} \mid a, b \in \mathbb{Q}\},$$

$$M = \{a + b\sqrt{\frac{m}{n}} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Ukaž, že pro vhodné  $k$  platí  $M = A_k$ ,” vyštěkla akrobatka zlomyslně.

*Sebral jsem všechny síly a odpověděl jsem jí. Ona se však jenom ušklíbla, mávla paží a rozplynula se v plamenech. Země kolem mě náhle začala měknout. Doběhl jsem doprostřed stanu, vylezl na stoleček, kde dříve stálo zrcadlo a sledoval, jak se celá podlaha kruhového stanu mění v lávu.*

*„Vidíš, říkal jsem že umře.“ Rozeznal jsem Krysův hlas kdesi v dálce za plameny. „Čekal jsem, že to bude uspokojivější.“*

*„Domnívám se, že je to stále příjemnější, než prohrát, nemám pravdu?“ odvětil mu Myš.*

*„Nebud' jízlivý, bratříčku. Jestli se nenaučíš prohrávat můžeme s tím skončit ještě dřív než začneme.“*

*„Než jsme zača-“*

*„JÁ JSEM JEŠTĚ NEUMŘEL!“ řval jsem na ně z plných plic, zatímco stoleček na kterém jsem stál pomalu ztrácel stabilitu. „Vidíš, říká, že ještě neumřel,“ poznamenal Myš.*

*„POMOZTE MI!“*

*„Máme kouzelnou rýsovací knížku.“*

*„JAK MI TO MÁ SAKRA POMOCT?“*

*„Mohli bychom ti narýsovat diamantový most o délce jedna,“ řekl Krys jakoby mimochodem.*

*„Ale neumíme rýsovat, mysleli jsme, že je to kniha plná rysů.“*

**ÚLOHA 3.4.** Krys a Myš mi konečně sdělili, že mají k dispozici pravítka, kružítko a úsečku dlouhou  $\sqrt{2018}$ . Pomocí nich prý můžou sestrojít kouzelnou úsečku dlouhou 1. Ale jak?

*Těsně než se stoleček do lávy ponořil docela se přede mnou objevil diamantový most a já po něm rychle vyběhl z ohnivého stanu. Na cestičce poslušně čekali Krys a Myš a když mě spatřili, hodili celou rýsovací knihu do ohně. „Stejně už je k ničemu. Žádní rysové.“*

*„Zavolejte hasiče, ať nezačnou hořet ostatní stany!“ řekl jsem udýchaně, zatímco jsem si hasil hořící záda a nohavici. Krys a Myš se na sebe jen pobaveně podívali a pak každý luskl svou jedinou rukou a oheň zhasl. Během vteřiny nebylo na místě stanu nic, než kovová konstrukce a vypálený kruh.*

*„Musíš vědět, co vlastně chceš, jinak tě Akrobatka zabije,“ zasmál se Myš. „My třeba potřebovali pomoci se sýrem, tak jsme tě zachránili.“*

*„Se sýrem?“ zeptal jsem se, zatímco jsem kontroloval, jestli fotografie, kterou jsem měl uloženou v kapse, přežila.*

**ÚLOHA 3.A.** Krys a Myš vytáhli z kapsy krychli sýra. Sdělili mi, že ji potřebují rozdělit jedním řezem na dva díly. Jejich požadavek však nebyl, aby byly stejné, nýbrž aby byl řezem šestiúhelník.

*Když jsem jim vysvětlil, jak sýr rozkrojit, vypadali oba potěšeně. „Můžete mi konečně vysvětlit, kde to jsem?“ zeptal jsem se zoufale.*

*„Ty ses rozhodl, že se vrátíš v čase,“ nadhodil Krys. „A Čas se teď rozhoduje, jestli k tomu máš dobrý důvod!“ smečoval vesele Myš.*

*„Mám! Myslím že hledám tuhle dívku!“ ukázal jsem jim fotografii. „Která se jmenuje?“ vyzýval mě Myš, abych pokračoval. Svěsil jsem hlavu. Nevěděl jsem.*

*„Nevadí! Máme automat na jména, nějaké jí vybereme!“ Kluci mě chytli za ruce a vlekli o několik desítek metrů dál, kde stál před stanem automat na jména.*

**ÚLOHA 3.B.** Automat na jména fungoval následovně: Vypadne z něho jméno pokaždé, když se do něj zadá prvočíslo  $p$ , pro které je  $18p + 1$  třetí mocnina nějakého přirozeného čísla. Potřeboval jsem najít všechna taková prvočísla.

*Žádné jméno mi však nic neříkalo a když už i Krys a Myš začínali být netrpěliví, vypadl náhle z automatu poslední papírek. Stálo na něm jméno „Agnes“. Když jsem zvedl oči, Krys a Myš už nestáli po mém boku, ale zalil mě chlad i horko najednou, když jsem zjistil, že vedle mě stojí ohnivá Akrobatka.*

*„Tak co, už víš co vlastně chceš?“ Zeptala se trochu přívětivěji než předtím.*

*„Myslím že hledám tuhle dívku.“ Ukázal jsem jí fotografii.*

*„A?“*

*„Tuším, že se jmenuje Agnes.“*

*„Na druhé straně té fotografie je obrazec. Co tušíš o něm?“ Otočil jsem fotografii a zjistil, že na druhé straně je tenkými čarami cosi narýsováno. „Myslím, že tahle přímka je tečna téhle kružnice.“*

*Akrobatka si povzdechla. „Tak vidíš Theodore, ty všechno jenom tušíš. A někoho, kdo tuší že se chce dostat do minulosti, tam prostě pustit nemůžeme.“*

**ÚLOHA 3.C.** Na zadní straně fotografie je čtyřúhelník  $ABCD$ , na straně  $AB$  je vyznačený bod  $E$  a průsečík úhlopříček je označen jako  $F$ . Navíc platí  $|AB| = 4$ ,  $|AE| = 3$ ,  $|AF| = 2$ ,  $|FC| = 4$ ,  $|EC| = 4$ ,  $|FD| = 8$ . Musím Akrobatce dokázat, že přímka  $AD$  je tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku  $ABC$ .

Vypadalo to, že to na Akrobatku udělalo dojem. Pak ale rychle skryla svůj úsměv a úsečně se zeptala: „A Agnes? To je kdo?“ Vytáhl jsem z kapsy revolver a náhrdelník, který jsem spolu s fotografií našel v krabičce a snažil jsem si vzpomenout. Potřeboval jsem ale hrát o čas. Řekl jsem Akrobatce složité matematické tvrzení.

„To není pravda,“ odvětila ona bleskurychle.

„Ale ano, jsem si jistý že je!“ Zíral jsem na revolver, náhrdelník a fotografii dívky jménem Agnes. Náhrdelník. Fotografie. Revolver. Náhrdelník. Fotografie. Revolver.

„Vsadil bys na to svůj život?“ zeptala se Akrobatka zlomyslně a obě ruce jí zaplály modrým plamenem.

**ÚLOHA 3.D.** Řekl jsem Akrobatce, že pokud  $a, b, c$  jsou strany trojúhelníka a  $r$  poloměr kružnice jemu opsané, platí potom že

$$\frac{(a + b + c)^2}{4abc} > \frac{1}{r}.$$

Teď ale ještě musím dokázat, že je to pravda.

„Já se nikdy nemýlím!“ vykřikla Akrobatka a chystala se mě spálit na popel. A pak jsem si vzpomněl: „Jmenuji se Teodor a vracím se v čase, abych zachránil svou dceru Agnes, kterou někdo unesl desátého prosince roku 1826.“

**Pokračování v příští sérii.**

**Svá řešení uploadujte na našich stránkách:**

<http://brkos.math.muni.cz/>