Milí řešitelé,

Jsme rádi, že jste se s námi vydali do dalšího ročníku Brkosu. Každý správný matematik si rád něco dokazuje, musí ale vždy přesně vědět, jak na to. V druhé sérii vám proto nabízíme zajímavé problémy, na kterých se lze jisté důkazové metody naučit a vyzkoušet si je. Snažte se být ve své argumentaci precizní a dejte si záležet, ať každý váš důkaz stojí za to. V pomocném textu jistě naleznete některé metody, tipy nebo příklady, jak správně dokazovat. Připomínám také, že letos zavádíme nový (spravedlivější) bodový systém. Úlohy už nejsou každá za stejně bodů a počítá se vždy 6 nejlepších, detaily si přečtěte na stránkách Brkosu. Tak šup dokazovat! Hodně zdaru přejí

Alča, Barča, Dominik, Minh, Linda, 2 × Martin,
Matěj, Matouš, Ondra, 3 × Tom, Viki, Vítek a Vojta

Zadání 2. série

Důkazy

Termín odeslání: 10. 12. 2018

Text kurzívou není součástí úloh.

Kapitola II.: Teodorova úchvatná cesta do minulosti

Desátého ledna roku 1827 jsem započal svůj výzkum na stroji času. Bylo mrazivé ráno a já si prostě sedl ke stolu a rozhodl jsem se, že vyvrátím celou fyziku a matematiku a vrátím se v čase. Byl jsem připraven udělat cokoli, abych zvrátil to, co se stalo před dvěma roky.

Úloha 2.1. Klíčové, pro mou cestu časem bylo zjistit, zda platí Alexandrovského hypotéza. Měl jsem před sebou řadu známých tvrzení o kterých jsem nevěděl, jestli platí, ale zjistil jsem o nich různé vztahy.

- Pokud neplatí Bakovského domněnka, tak platí Coquinova domněnka.
- Pokud platí Dantova věta, tak platí Alexandrovského hypotéza nebo Velká Eliášova věta.
- Pokud neplatí Fisherova hypotéza a platí Bakovského domněnka, tak platí Güblerova domněnka.
- Z platnosti Coquinovy domněnky plyne, že Velká Eliášova věta neplatí.
- Jestliže neplatí Alexandrovského hypotéza a platí Güblerova domněnka nebo Fisherova hypotéza, tak platí i Coquinova domněnka.
- Dantova věta platí.

Když jsem vyřešil problematiku Alexandrovského hypotézy, dokázal jsem konečně odvodit, že cesta zpátky časem by skutečně měla být možná. Sice jsem pořád nerozuměl tomu, jak se realita zahojí poté, co způsobím paradox, ale tohle byla moje jediná šance a já ji odmítal promeškat. Další tři měsíce jsem skoro nespal ani nejedl a celou moji pracovnu pokrývalo moře výpočtů, nákresů a chemických vzorců. Musel jsem dokonce kontaktovat několik studentů, aby mi pomohli vyřešit problém, na kterém jsem byl už skoro týden zaseknutý:

Úloha 2.2. Nechť p je prvočíslo. Dokažte, že pokud rovnice $x^3 - y^3 = p$ má přirozená řešení x, y, pak existuje celé číslo k takové, že $p = 3k^2 + 3k + 1$. A naopak pokud takové k existuje, pak rovnice $x^3 - y^3 = p$ má přirozené řešení.

Tento důkaz byl pro mě neuvěřitelným pokrokem. Už jsem si nepřipadal jako zoufalec, který ztrácí kontakt s realitou, ale jako skutečný vědec, který stojí na pokraji nové epochy. Veškeré výpočty jsem v létě roku 1827 dokončil a začal jsem konstruovat samotný stroj.

BRKOS Team 2018

Úloha 2.3. Věděl jsem, že portál do minulosti musí mít tvar čtyřúhelníku $ABCD$. Dále, že musí být dána osa úhlu o_a u vrcholu A, osa úhlu o_c u vrcholu C, kolmice e k o_c, procházející vrcholem C. Průsečík o_a a e jsem nazval E. Taky je dána přímka f, která je rovnoběžná se stranou BC a prochází bodem D. Průsečík e a f jsem nazval F. Potřeboval jsem dokázat, že následující tři tvrzení jsou v ekvivalenci (pokud platí kterékoli z nich, tak platí všechny tři):

- Čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový
- Čtyřúhelník $ACED$ nebo $AECD$ (podle toho, který je konvexní, uvažte obě varianty) je tětivový
- Čtyřúhelník $AEFD$ je obecnější případ deltoidu (úhel $\sphericalangle DFE$ je shodný s úhlem $\sphericalangle EAD$).

Tento čtyřúhelník jsem následně nakreslil na zeď a kolem něj začal budovat stroj času. Místo papírů teď všude na zemi ležela ozubená kola, různé elektrické výbojky, ampule s tekutinami různých barev a dráty. Měl jsem pocit, jako bych si ochranné brýle několik měsíců vůbec nesundal. 10. prosince 1827 jsem poprvé zatáhl za velkou páku a stroj s obrovským rachotem začal pracovat. Nejdřív z něho jen létaly jiskry a po kovových součástkách běhaly elektrické výboje, ale po chvíli se začalo dít to, v co jsem skutečně doufal. Uvnitř vyznačeného čtyřúhelníku se začala tapeta rozostřovat, jako bych mhouřil oči a zářila čím dál víc. Bál jsem se, že mi prasknou ušní bubínky, tak hlasitý a nepříjemný zvuk stroj vydával. A pak bylo náhle úplné ticho. Takové ticho, že když jsem zatleskal, nebylo slyšet vůbec nic. Čtyřúhelník na zdi chvíli výmluvně zářil, ale pak celou místnost zalilo světlo a tlaková vlna mě odhodila na opačnou stranu pokoje. Chvíli jsem sbíral svůj vyražený dech, ale jinak bylo vše v normálu. Všechny zvuky ulice, nad kterou bydlím, se vrátily a i pokoj vypadal neporušeně. Jediné, co bylo nové, byl stroj opřený o zeď a díra do neznáma, která zářila barvami, které ještě nikdy nikdo neviděl.

To byl ale stále jen začátek. Zbýval jen rok času a tak jsem nezahálel a začal testovat, co se stane, když do portálu hodím různé věci. Zjistil jsem, že většina z nich z něj okamžitě vypadne zpátky, ovšem s jinými rozměry a hmotností, jako by časoprostor nechtěl, abych cokoli posílal zpět v čase. Měsíc jsem studoval tyto vztahy a snažil jsem se zachytit tyto deformace funkcí.

Úloha 2.4. Nechť f je funkce dvou reálných proměnných taková, že $f(1,1) = 2$ a pro všechny přirozená čísla m, n platí

$$\begin{cases} f(m+1,n) = f(m,n) + 2(m+n) \\ f(m,n+1) = f(m,n) + 2(m+n-1). \end{cases}$$

Ukažte, že platí

$$f(m,n) = (m+n)^2 - (m+n) - 2n + 2.$$

Byl jsem frustrovaný. Zdálo se, že stroj který jsem postavil nebyl vůbec průchodem do jiného času, ale továrnou na zvětšené nebo zmenšené věci. Pravda je, že jsem si díky tomu slušně vydělával zvětšováním šperků, ale nezbývalo mnoho času a já potřeboval do minulosti, ne být milionářem.

V únoru 1828 jsem ve vzteku celý stroj rozkopal a začal znova. Tentokrát jsem vytvořil dva kruhové portály a zkoušel jsem je následně prolnout.

Úloha 2.A. Nakreslil jsem dvě kružnice, které se protínají. Aby nebyl portál nakloněný, potřeboval jsem dokázat, že spojnice průsečíků je kolmá na spojnici středů.

Výsledný portál jsem dokončil v srpnu. Měřil na výšku skoro dva metry a zatímco dva kruhy zářili stejnou barvou, jako můj starý portál, tam kde se překrývaly, byla naprostá temnota. Věci, které jsem do temnoty hodil, se nevracely. To bylo dobré znamení. 10. 12. 1824, moje destinace.

Úloha 2.B. Na zeď jsem následně napsal čísla od jedné do n v klasickém pořadí. Na další řádek jsem je potom napsal v jiném pořadí. Na třetí řádek jsem napsal rozdíl dvou čísel nad ním (vždy první mínus druhé). Stalo se přesně to, co jsem čekal. Součet čísel na třetím řádku byl vždy 0. Teď jsem to jen potřeboval dokázat.

Z tohoto vyplývalo, že bez ohledu na to, jaká rozhodnutí a změny udělám v minulosti, měla by celková časová chronologie vždy zůstat neporušená, což znamená, že kdybych před dvěma lety zastřelil svou kočku, která mi teď sedí na klíně, vesmír si sám najde způsob, jak nezpůsobit žádné paradoxy. Kladné a záporné síly se vždy vyruší a stejně tak všechno zlo, co bych přinesl do minulosti se samo nahradí nějakým dobrem.

V listopadu jsem pozval svého kamaráda Alexandra na čaj, abych ho požádal o tetování. Alexandr byl urostlý muž s jizvou přes půlku obličeje. Procestoval celý svět, ale přesto nikdy moc nemluvil. Seznámili jsme se už dávno na zámořské plavbě.

„Proč tyhle čísla?“ zeptal se mě.

„Je to datum kdy zmizela.“

„Jsi si jistý, že je pro tebe dobré, aby sis to každý den připomínal?“

Musel jsem sebrat všechnu svou sílu, abych Alexandrovi neřekl o celém svém plánu. Ale ani on by mě nepochopil. Tohle je bitva jednoho muže. „Ano.“

„Nechceš nějaké jiné číslo? Víš že existují čísla, která jsou dokonalá? 49! To je krásný číslo.“

„49 není dokonalé.“

„Jak to víš tak rychle?“

Úloha 2.C. Pamatoval jsem si, že aby mohlo být liché číslo dokonalé, nesmí se jednat o druhou mocninu přirozeného čísla. Potřeboval jsem však důkaz. (Poznámka: dokonalé číslo je takové přirozené číslo n, pro které platí, že součet všech jeho přirozených dělitelů mimo samo n je roven číslu n. Například $1 + 2 + 3 = 6$ nebo $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$.)

„Aha,“ řekl na to Alexandr, kterého to očividně vůbec nezajímalo. Ještě ten den mi na ruku vytetoval „10121824“.

A pak bylo desátého prosince. Oblékl jsem se a do dřevěné krabičky jsem vložil její fotografii, náhrdelník a svůj revolver. Zbývalo dopočítat poslední řádek výpočtu a nastavit všechny ciferníky stroje času na správné hodnoty.

Úloha 2.D. Poslední řádek výpočtu, který mi chyběl vypadal takto: Nechť $x < -1$, $y > 1$ jsou reálná čísla. Ukažte, že platí

$$\frac{(x-y)^2}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{y^2-1}} > 3.$$

Vše bylo připraveno a já nervózně polkl, když jsem se zblízka podíval do temnoty na druhé straně portálu. Nadechl jsem se a udělal krok vpřed. Poslední, co si pamatuji, je, že se všechno roztočilo a já měl pocit, že se rozpínám a potom zase smršťuji. Krabička mi vypadla z ruky a já letěl a letěl a měl jsem přesně ten pocit, jako když se vám zdá sen, kde vypadnete z dětské houpačky.

Otevřel jsem oči a chvíli zíral na pruhovaný strop. Když jsem se posadil, chvíli jsem nechápal, kde vlastně jsem. To se lidem po probuzení někdy stává, ale jak to, že jsem tohle místo stále nepoznával? Promnul jsem si oči. Ležel jsem na červeném semišovém gauči v místnosti, kde nebyl až na jednu vyřezávanou skříň žádný nábytek. Stěny tvořilo černo-červeně pruhované plátno, takže to vlastně nebyla ani tolik místnost, jako stan.

Pokračování v příští sérii.

Svá řešení uploadujte na našich stránkách:
http://brkos.math.muni.cz/