

## Milí řešitelé,

po letních prázdninách vás opět vítáme u matematického semináře BRKOS.

Letos jsme si pro vás připravili 6 sérií po 8 úlohách. V každé sérii budou 4 tematické a 4 netematické úlohy. První dvě úlohy v každém bloku se snažíme vybírat jednodušší, abychom dali šanci i začínajícím řešitelům v nižších ročnících. Naopak úlohy 4 a D jsou pak obtížnější, aby byl seminář zajímavý také pro naše veterány. Z tohoto důvodu jsme také změnili bodovací systém, ve kterém nyní získáváte body pouze za 6 nejlépe vyřešených úloh. Pro více informací o novém bodovacím systému se neváhejte podívat na náš web `brkos.math.muni.cz`.

Další výraznou změnou je nový mysteriózní příběh plný nečekaných zvrátů, který bude navazovat skrz celý letošní ročník. Ovšem pro ty z vás, kteří jsou nedočkaví na úlohy a nechtějí se zdržovat příběhem, jsme úlohy z beletrického textu vyčlenili a všechny potřebné informace jsou tak obsaženy pouze v zadání úloh.

V poslední řadě připomínáme, že ti nejlepší z vás se mohou těšit na hodnotné ceny na konci roku a především na skvělá soustředění plná zábavy, her a super lidí.

Hodně zdaru přeji

*Alča, Barča, Dominik, Minh, Linda, Martin,  
Matěj, Matouš, Ondra, 3 × Tom, Viki, Vítek a Vojta*



Zadání 1. série

# THEODORŮV CIRKUS ČASU

Termín odeslání: 29. 10. 2018



Text kurzívou není součástí úloh.

## KAPITOLA I.: DESET, DVANÁCT, OSMNÁCT, DVACET ŠEST

*Toho rána jsem otevřel oči a chvíli zíral na pruhovaný strop. Když jsem se posadil, zprvu jsem nechápal, kde vlastně jsem. To se lidem po probuzení někdy stává, ale jak to, že jsem tohle místo stále nepoznával? Promnul jsem si oči. Ležel jsem na červeném semišovém gauči v místnosti, kde nebyl až na jednu vyřezávanou skříň žádný nábytek. Stěny tvořilo černo-červeně pruhované plátno, takže to vlastně nebyla ani tolik místnost, jako stan. Místo na koberec mé bosé nohy došláply na dřevěné piliny. Po zemi hopkal malý černý kos. Dohopkal až k mým polobotkám, položeným na zemi, a podíval se na mě. Jen co jsem mrkl, byl však pryč a v pilinách nebyly vidět ani otisky jeho pařátů.*

*Obul jsem si polobotky a obezřetně jsem odhrnul plachtu. Vyděšeně jsem sebou trhl a ucowl. Pak mi to ale nedalo a znovu jsem vykoukl ven. Venku před stanem se dělo něco podivného. Dva tlustí černovlasí kluci, kterým nemohlo být víc než dvanáct, tam hráli jakousi hru. Každému chyběla jedna ruka a na těch, co jim zbývaly, zmateně krčili prsty a občas vykřikli: „Kryšmys! Zase to nevyšlo!!!!“*

**ÚLOHA 1.1.** Dva kluci hrají hru na prstech. Každý krčí prsty jedné ruky. Jednotlivé prsty mají svou hodnotu: palec a malíček 1, ukazováček a prsteníček 2, prostředníček 3. První kluk začne skrčením jednoho prstu. Následně se střídají v tazích. Ve svém tahu musí hráč skrčit 1, 2, nebo 3 prsty podle toho, kolik byla maximální hodnota skrčeného prstu z tahu předchozího hráče.

Např. pokud hráč *A* skrčí prsty s hodnotou 3 a 1, hráč *B* musí skrčit 3 prsty.

Pomozte jim zjistit, kterými prsty mohou začít, aby na konci měli na obou rukou skrčené všechny prsty.

*Chvíli jsem na ně zíral, naprosto hypnotizovaný jejich hrou. Jeden z nich se náhle otočil a když mě spatřil, na obličeji se mu rozzářil široký úsměv.*

*„Vidíš, říkal jsem, že se probudí!“*

*„Chtěl jsi říct, že řekneš, že se probudí.“*

*„Řeknu, že jsem řekl, že se probudí?“*

*„Ne, to není správně.“*

*„Přechodník?“*

*„Myslíš, že tenhle čas ještě nebyl vynalezen.“*

*„Musel by ho někdo býval vynalezne.“*

*„Což by byl býval bude nevynalezen.“*

*„By býval bude?“*

*„Já jsem Krys!“ řekl náhle jeden. „A já jsem Myš,“ dodal druhý. Oba ke mně přišli a srdečně mi potřáslí oběma rukama. Krys pravou a Myš levou.*

„Kdybys byl molekula,“ řekl potom Kryš, „jaká molekula bys byl?“ dodal Myš. „Nebo spíš,“ pokračoval Kryš, „kolik atomů bys měl?“ dokončil Myš a oba dostali záchvat smíchu i přes to, že já jejich vtipu nerozuměl, ani co by se za nehet vešlo.

**ÚLOHA 1.2.** Kryš a Myš stále naléhají a chtějí po mně, abych byl molekula. Důležité prý navíc je, aby v ní každý atom byl propojen právě se třemi jinými atomy. Jaké počty atomů můžu jako molekula mít?

Oba kluci byli s mou odpovědí spokojeni. „Pojď, ukážeme ti kouzelnou kočku!“ Kryš mě chytil za ruku a táhl k jinému stanu. Byla černá noc a já se podle všeho nacházel mezi cirkusovými stany. „Tak počkat.“ Vytrhl jsem se mu a zůstal stát na místě. „Kde to jsem?“ Zoufale jsem potřeboval alespoň nějaké odpovědi. Kryš i Myš chvíli mlčeli a po chvíli Myš zvolal: „O co, že ho unesu!“ A potom si mě hodil na rameno svou obtloustlou rukou a zbytek cesty mě nesl až do stanu, nad jehož vstupem skutečně stálo: „Kouzelná kočka“.

**ÚLOHA 1.3.** V místnosti je devět krabic v mřížce  $3 \times 3$ . V jedné z nich je kouzelná kočka. U stropu visí velké zlaté hodiny. Kryš a Myš mi vysvětlili, že každou minutu se můžu podívat do dvou krabic. Až minuta uplyne, z hodin vylétne sprška jisker a kočka se přemístí do jedné ze (stranově) sousedních krabic. Lze kočku najít po konečném počtu minut?

Když jsem bratrům Kryšmyšovým odpověděl na jejich otázku a oni vypadali, že jsou s mou odpovědí spokojeni, zeptal jsem se, jestli by mi mohli vysvětlit, co se vlastně děje. Kryš se dlouze zamyslel, vyměnil si s Myšem dlouhý pohled a pak řekl: „Spíš ne.“ Ale pak rychle dodal: „Ale líbí se nám tvoje tetování!“ jakoby mě chtěl utěšit. „Já nemám žádné–,“ chtěl jsem namítnout, ale pak jsem se podíval na svou ruku. Na mém předloktí bylo černými číslicemi vytetována čísla deset, dvanáct, osmnáct a dvacet šest.

„My máme taky tetování!“ vyhrkl Myš.

„Jenže já chtěl krysu.“

„A já myš.“

„Ale někdo to popletl a tak mám mysu.“

„A já kryš.“

„Což mi připomíná,“ Kryš mi naznačil, ať se skloním, aby mi mohl zašeptat do ucha: „Kryškryš a kryš je větší nebo rovno iks. Iksiks a iks je menší nebo rovno mys. Mymys a mys je větší nebo rovno ypsilon a ypsilonypsilon a ypsilon je menší nebo rovno kryš.“

Naštěstí jsem pochopil jejich zvláštní kryšomyší matematiku a po deratizaci jsem sestavil soustavu nerovnic, kterou chtěli vyřešit.

**ÚLOHA 1.4.** Pro jaké parametry  $a, b \in \mathbb{R}$  má následující soustava nerovnic jediné řešení pro proměnné  $x, y \in \mathbb{R}$  a jaké je to řešení?

$$\begin{aligned} a^2 + a &\geq x \\ x^2 + x &\leq b \\ b^2 + b &\geq y \\ y^2 + y &\leq a. \end{aligned}$$

„A teď vzhůru za kouzelným psíkem nepsíkem!“ vykřikl Myš hystericky a ukázal na další

stan.

„Tak počkat,“ řekl jsem rozhodně. „Já už s vámi nikam nejdu.“

„Ale jdeš!“ Kryš chytil moji ruku a táhl mě vpřed. Nadechl jsem se, abych odporoval, ale jeho obličej se náhle sraštil v obličej ošklivého starce, zamračil se na mě a vycentil pár svých posledních zubů. V dalším momentu byl jeho normální obličej zpátky. To mi stačilo. Naposledy jsem se mu vytrhl a rozeběhl jsem se opačným směrem, než ukazovali, a běžel jsem a běžel a ani jsem se neohlížel, jestli mě jednoruká dvojčata následují. Nakonec jsem se přece jen otočil, a když jsem ani Kryse ani Myše nespatriil, schoval jsem se rychle do jednoho z černo-červených stanů.

Uvnitř bylo příjemně měkké světlo a bylo zde cítit dřevo. Bodejž by taky ne, když byly všude rozpracované kusy nábytku a náčiní pro akrobaty, všechny obratně vyřezávané z tmavého dřeva. Uprostřed místnosti stála taburetka a na ní krásná dřevěná krabička velikosti větší šachovnice, na níž byly z různě barevného dřeva vyvedeny planety, jejich oběžné dráhy a souhvězdí. Nikde jsem neviděl žádný způsob, jak ji otevřít. Chtěl jsem se posadit, ale naštěstí jsem si včas všiml, že na taburetce mimo krabičku leží ještě kružítko s malým nožíkem místo tuhy.

Všiml jsem si, že na krabičce jsou drobným psacím písmem popsány tři geometrické úkoly. V celé místnosti však nebylo ani jedno pravítko. Rozhodl jsem se, že si vystačím jen s kružítkem. Sotva jsem ho zapíchl do krabičky, planety zmizely, jako by mi chtěly udělat místo k rýsování.

**ÚLOHA 1.A.** Jen za pomoci kružítko popište následující konstrukce:

1. Jsou dány dva body  $A$  a  $B$  vzdáleny od sebe  $d$ . Sestrojte třetí bod  $C$ , který bude ležet na polopřímce  $\overrightarrow{AB}$  a bude od  $A$  vzdálený  $2d$ .
2. Je dána kružnice  $k$ , její střed  $S$ , bod  $A$ , který leží na  $k$  a bod  $A'$ , který je obrazem bodu  $A$  v osové souměrnosti podle dané neznámé osy  $o$ . Sestrojte obraz kružnice  $k$  v osové souměrnosti podle  $o$ .
3. Jsou dány 2 body vzdálené od sebe 1. Vyroberte vzdálenost  $\sqrt{3}$ .

Musím přiznat, že bez ohledu na to, že na kouzla nevěřím, jsem byl zklamaný, když se krabička neotevřela.

„Přesvědčivé,“ ozval se za mnou hluboký mužský hlas. Rychle jsem si stoupl a otočil se s kružítkem připraveným k sebeobraně. Místnost byla pořád prázdná. Hlas pokračoval:

**ÚLOHA 1.B.** Je dán rovnoramenný lichoběžník  $ABCD$ . Označme jeho ostrý vnitřní úhel u vrcholu  $A$   $\alpha$ , jeho základny  $a$ ,  $c$ , kde  $a \geq c$  a jeho obsah  $S$ .

Pro jaký úhel  $\alpha$  platí:

$$4S = a^2 - c^2 ?$$

$S$  nejistotou v hlase jsem odpověděl. Ticho. „Kdo js–,“ začal jsem, ale hlas mě přerušil:

**ÚLOHA 1.C.** Necht  $A$ ,  $B$  jsou krajní body čtvrtkružnice  $k$  se středem v bodě  $S$ . Body  $C$ ,  $D$  leží po řadě na úsečkách  $AS$  a  $BS$  a platí, že kolmice jimi vedené k úsečkám, na kterých leží, protínají  $k$  ve stejném bodě. Lze pouze ze znalosti vzdáleností  $|AC|$  a  $|BD|$  jednoznačně určit poloměr kružnice?

*Rezignovaně jsem se posadil a odpověděl hlasu i na tuhle otázku.*

*„Víte, co je zajímavé, Teodore?“*

*Zarazil jsem se, jako bych po dlouhé době poprvé slyšel své vlastní jméno. Hlas nečekal na mou odpověď a pokračoval: „Že kružnice je ten nejjednodušší geometrický útvar a stejně ho ještě nikdo zcela nepochopil. Řekněte mi, Teodore, proč kočka číhá na myš?“*

*„Aby ji snědla?“ odpověděl jsem nejistě.*

*„A proč jí kočka myš?“*

*„Protože má hlad?“*

*„Ne, Teodore. Aby měla na co číhat. Geometrie vám jde lépe, než filozofie. Tak tedy.“*

**ÚLOHA 1.D.** V trojúhelníku  $ABC$  protínají osy úhlů  $\alpha$  a  $\beta$  strany  $BC$  a  $CA$  po řadě v bodech  $D$  a  $E$ . Určete velikost úhlu  $\gamma$  u vrcholu  $C$ , víte-li, že  $AE + BD = AB$ .

*Když jsem vyslovil odpověď, hlas už se neozval. Jenom na krabičce se znovu objevily dřevěné planety, jen tentokrát se daly do pohybu, a tak se Země otáčela kolem Slunce a Měsíc kolem Země a pak se náhle všechno zastavilo a krabička se rozlomila vejpůl. Zvnitř vypadl náhrdelník, fotografie a revolver a já si najednou vzpomněl, že se skutečně jmenuji Teodor a že jsem vědec a že co si pamatuji, tak byl naposled rok 1828 a já pracoval na svém stroji času. Na to, že bych šel do cirkusu, jsem si ovšem nepamatoval.*

**Pokračování v příští sérii.**

**Svá řešení uploadujte na našich stránkách:**

<http://brkos.math.muni.cz/>