Zadání 6. série

Diofantické rovnice

Termín odeslání: 7. 5. 2018

autoři: *Matouš, Minh*

Úloha 6.1. Toho rána měli Henry s Matějem budík nastavený na velmi brzkou hodinu, ale ani to jim nebránilo v pohotovém vstávání, protože se oba na ten den těšili celý rok. Jen co se převlékli, utíkali do koupelny, kde už měli nachystané kbelíky s vodou. A na rozcvičku položil Henry Matějovi otázku: „Které všechny objemy a jak jsme schopní získat pomocí 72 litrové, 168 litrové a 126 litrové nádoby? K dispozici máme ještě neomezenou nádobu a neomezený zdroj vody. Nádoby můžeme mezi sebou libovolně přelévat."

Úloha 6.2. Henry s Matějem dotáhli ten veliký kýbl plný vody až do pokojíku kde spala Liběnka. „Tak na 3. 1, 2, 3!", odpočítal Matěj čas útoku a společně vylili celý ten kýbl vody na chuděru spící Liběnku. Ta dlouho spící nezůstala. "U všech dvojic celých čísel, které splňují

$$(x+y^2)(x^2+y)=(x+y)^3 \qquad !"$$

Zaklela rozespalým a trochu vyděšeným hlasem. Chvíli se ještě rozkoukávala, kluci, kteří ji normálně neslyší nadávat taky koukali, ale po chvíli ticho prolomil Matěj když se Liběnky zeptal: „A jaké vlastně všechny takové dvojice jsou?"

Úloha 6.3. Dlouho to netrvalo a kluci měli upletené pomlázky a mohli se vrátit domů za Liběnkou. Jaro bylo v plném proudu, tráva se zelenala a v ní se, hned vedle prvosenek, pásla prvočísla. „Taťko, koukej, tady je ale prvočísel! Já si myslím, že by se tady našla úplně všechna.", zavolal Matěj nadšeně na Henryho. „To je hezké. A zvládneš mezi nimi najít všechna prvočísla p, pro která existují přirozená čísla n, x, y, taková, že $p^n = x^3+y^3$?"

Úloha 6.4. Už byli skoro doma, když se Matěj začal trochu zdráhat. „A…je to vůbec přirozené, takhle mlátit holky?", řekl se smutným pohledem. „Podívej se, existují taková přirozená $n, a \in \mathbb{N}$, pro něž existuje provočíslo p splňující

$$2a^p p + a^p + np^n = anp^n + 2p + 1 \quad .$$

Když je všechny najdeš, tak budou přirozené i velikonoční zvyky."

Úloha 6.A. Liběnka zatím doma nabarvila vajíčka a pracovala na výzdobě. V papírnictví si koupila dva stejně velké papírové rovnostranné trojúhelníky. Potom rozstřihla každý z nich na tři díly a z těchto šesti dílů poskládala čtverec, aniž by se některý z dílů překrýval nebo mezi nimi byla mezera. Dokážete to také? Liběnce hodně pomohlo, že si s trojúhelníky chvíli hrál také Matěj, který jeden z nich rozstřihl napůl a spolu s druhým sestavil obdélník. Stačí, když popíšete, kudy a v jaké vzdálenosti byste stříhání prováděli.

BRKOS Team 2018

Úloha 6.B. Jaké překvapení čekalo Liběnku, když si na ni Henry připravil pomlázku ve tvaru pravidelného dvanáctistěnu! Navíc měla tato zajímavá pomlázka pruty ležící ve stěnách spojující středy hran. Kolik nejvýše disjunktních trojúhelníků dokážeme z těchto prutů na dvanáctistěnu vytvořit? Samozřejmě bychom neradi Henryho pomlázku zničili, proto nebudeme pruty nijak lámat či jinak deformovat.

Úloha 6.C. A jak to tak bývá, Liběnka dostala výprask a i přes to měla pro kluky připravenou odměnu. A tou odměnou jim byl čokoládový konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Měl označený M průsečík jeho úhlopříček a K průsečík osy úhlu ACD s úsečkou BD. Dokažte že, čtyřúhelník $ABCK$ je tětivový právě tehdy, pokud platí $|MB||MD| = |MA||MC| + |MA||CD|$.

Veselé Velikonoce!

Svá řešení posílejte na adresu:
BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno

nebo uploadujte na našich stránkách:
`http://brkos.math.muni.cz/`