Zadání 5. série

ŠACHOVNICE

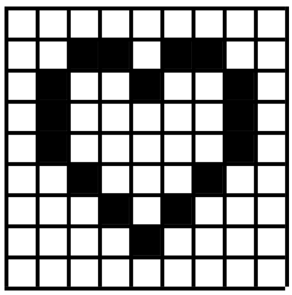
Termín odeslání: 2. 4. 2018

autoři: *Martin, Ondra*

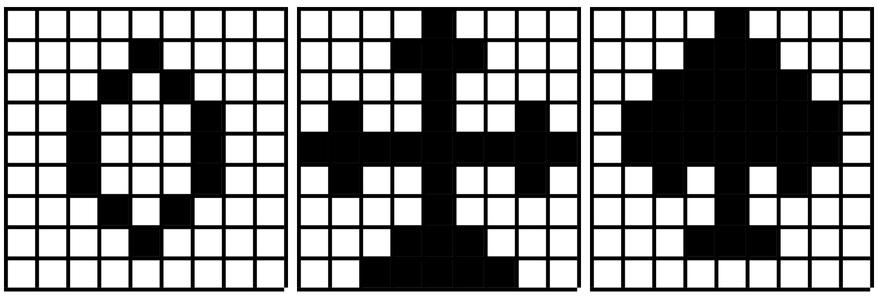
Úloha 5.1. Byla zima a nad šachovnicí se začínalo stmívat. Na věži se tvořily rampouchy a král s královnou už vymýšleli strategii pro další den. Šemík zaržál, což královi vnuklo otázku: Kolik nejméně barev je potřeba na obarvení šachovnice 8×8 tak, aby se král nikdy neposunul z pole na pole o stejné barvě (tj. aby pole sousedící hranou nebo rohem měla jinou barvu)?

Úloha 5.2. „Ale Karle," poznamenala královna, „jsi nachlazený a nemůžeš si skákat po šachovnici. Co kdybychom se zamysleli spíše nad tím, kteří zobecnění koně nás mohou dostat po několika skocích na libovolné pole na světě." Normální kůň 2×1 skáče dva dopředu a jeden stranou. Zobecnění koně $n \times 1$ skáčí o n dopředu a o jeden stranou. Nalezněte tedy všechna taková n, pro která se mohou zobecnění koně $n \times 1$ dostat na libovolné pole nekonečné šachovnice.

Úloha 5.3. „Libuško, to jsme už řešili mnohokrát. Nového koně ti koupím, až vyhrajeme nějakou válku. Královská pokladnice je teď prázdná.", povzdechnul si král a rozhlédl se po poli. „Ale koukej, protože tě mám rád, nakreslil jsem ti na naši krásnou šachovnici 9×9 černo-bílé srdíčko":



„A mám pro tebe úkol! Můžeš prohazovat řádky, prohazovat sloupce, vzít kopii jednoho řádku a přiložit ho na sousední, takže vznikne políčko po políčku kombinace (černá a černá → bílá, černá a bílá → černá, bílá a bílá → bílá) a to stejné se sloupečky. Na které z těchto 3 symbolů dokážeš takto srdíčko překreslit?" a ukázal jí tyto varianty:



Úloha 5.4. Libuška se zamyslela, ale brzy se vrátila k původnímu tématu. „To je od tebe milé, Karle, ale možnost vyhrát válku budeš mít velmi brzy – zrovna včera jsem vyhlásila válku sousednímu království. A kromě toho, ty peníze z královské pokladnice vůbec nepřišly na zmar. Koupila jsem nový kanon KX UltraSmart 3000, který se po šachovnici dokáže pohybovat o jedno pole nahoru, dolu, doprava či doleva. Jenom jedno mi teď vrtá hlavou. Řekli mi, že pokud existuje cesta kanonem na šachovnici 8×8 taková, že navštíví každé políčko právě jednou (kromě prvního, na které se nakonec vrátí) a že kanon udělá stejný počet horizontálních (doprava a doleva) a vertikálních (nahoru a dolu) pohybů, pak dostanu ještě jeden kanon zcela zdarma. Mám na něj nárok?“

Úloha 5.A. Nad šachovnicí létali ptáčci a tryskáče, které dělaly v oblacích přímky a úsečky. Vypadalo to asi takto: Úsečka AB, $|AB| = 1$ a dvě kolmice na tuto úsečku a, b, $A \in a$, $B \in b$. Bodem A (B) vedly přímky p (q) tak, že p byla kolmá na q a obě byly různoběžné s a, b. Označme P průsečík p,b a Q průsečík q,a. Dokažte, že $|AQ| \cdot |BP| = 1$.

Úloha 5.B. Jeden z ptáčků si zpíval: „Pí pí, znám včechna reálná čísla c taková, že pro libovolné kladné reálné x platí $\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}} > c$.“ Nalezněte největší takové c.

Úloha 5.C. Mezitím v tryskáči měl jeden pán reálné polynomy. Polynom $P(x)$ stupně n s n různými reálnými kořeny. Pomožte pánovi najít všechny rostoucí polynomy $R(x)$ stupně nejvýše $n-1$ splňující $R(P(x)+x) = P(R(x)) + R(x)$.

Svá řešení posílejte na adresu:
BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno

nebo uploadujte na našich stránkách:
`http://brkos.math.muni.cz/`