



VÝROKOVÁ LOGIKA

Termín odeslání: 26. 2. 2018

autor: *Viki*



Úloha 4.1. Liběnka, jakožto vedoucí klubu matematiků s pravým palcem u nohy větším než levý, organizuje pro tento klub sraz. Na něj pozvala Koumu, Ňoumu, Henryho a Matěje. Kouma přijde na sraz, jen když přijde Ňouma. Henry a Ňouma nepřijdou současně, ale přijde alespoň jeden z nich. Nakonec, nemůže se stát, že by na srazu byli současně Kouma, Henry a Matěj. Určete všechny možné kombinace, jak může vypadat účast na srazu.

Úloha 4.2. Kouma přemýšlel, zda se srazu zúčastnit. Hlavním aspektem rozhodnutí však nebyl výsledek předchozí úlohy, ale fakt, že by nechal doma samotnou binární spojku Θ s následující pravdivostní tabulkou:

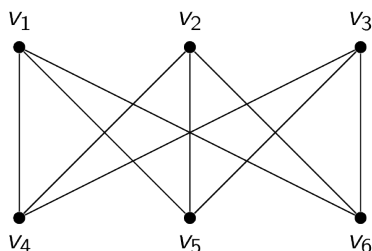
A	B	$\Theta(A, B)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

"Nenechávej mě tu samotnou, když tu zůstaneš, vytvořím ti jakoukoli výrokovou formuli si budeš přát!" vzlykala binární spojka. "Dobře, vytvoř mi tedy formuli, která je ekvivalentní s formulí $C \rightarrow (A \wedge B)$." Napište také výrokovou formuli, která je pravdivá právě tehdy, když je pravdivá $C \rightarrow (A \wedge B)$ a obsahuje jen binární spojku Θ (ne nutně jednou), výrokové proměnné a závorky.

Úloha 4.3. Sraz probíhal jako obvykle. Mezi poměřováním ostatních končetin se však na programu objevila položka navíc - Liběňčina soutěž: Najděte co nejkratší výrokovou formuli obsahující pět výrokových proměnných A, B, C, D, E , která je pravdivá právě tehdy, když je pravdivý právě sudý počet proměnných. Koumovi (ať už na srazu byl nebo ne) se podařilo nalézt formuli, která má 20 znaků (tzn. proměnná, operátor nebo závorka). Podaří se vám najít ještě kratší? Ve formulí smíte používat pouze výrokové proměnné, závorky a libovolné unární nebo binární logické spojky.

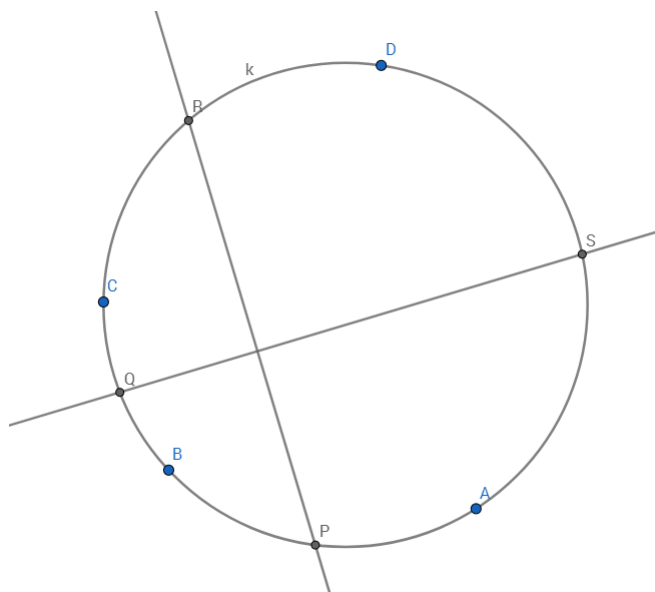
Úloha 4.4. Když Kouma soutěž vyhrál, snažil se přednést předem připravenou děkovnou řeč. Avšak ještě než začal, pozornost strhla Ňoumova unikátní ternární spojka Δ , kterou si vycvičil, aby byla pravdivá právě tehdy, když jsou pravdivé dva ze tří jejích argumentů. Ňouma hned předvedl pár příkladů: $\Delta(1, 0, 0) = \Delta(1, 1, 1) = 0$, $\Delta(1, 0, 1) = \Delta(1, 1, 0) = 1$. "Tahle spojka umí všechno, s její pomocí jsem schopný zapsat každou formuli výrokové logiky!" Kouma se zamyslel a odpověděl: "To není pravda! Musíš ke své spojce přidat negaci." Dokažte, že má Kouma pravdu. Nalezněte výrokovou formuli, která se nedá zapsat jen pomocí spojky Δ a dokažte, že každá formula se dá zapsat jen pomocí spojky Δ a negace \neg . Při důkazu můžete využít plnohodnotnost systémů uvedených v pomocném textu.

Úloha 4.A. Ňouma se hned urazil, nabral hrnkem sýrovou omáčku a polil jím Koumu. Kouma se však nebránil a jen sýrově poznamenal: "Podívej, na hrnku je šest fleků sýrové omáčky spojených tak, že tři fleky jsou spojeny s dalšími třemi a přesto se čáry ani trochu nekříží." "To je toho, takhle jde spojit každých šest fleků na hrníčku." Odvětil Ňouma. Ukažte, jak lze na obyčejném hrnku s jedním uchem spojit šest bodů jako na obrázku, ale tak, aby se spojnice nekřížily.



Úloha 4.B. Mezitím, co si ostatní otírali o koumu nachos, v jiné časové linii krále zaklela čarodějnice, že on a všichni jeho synové budou buď bezdětní, nebo budou mít právě 2 syny. O mnoho let později tato dynastie vymřela. Dohromady v této dynastii bylo 101 mužů (včetně krále). Kolik z nich bylo bezdětných?

Úloha 4.C. Viděl v nich totiž kružnici k a na ní postupně body A, B, C, D . My si však označme postupně P, Q, R, S středy oblouků AB, BC, CD, DA . Dokažte, že PR je kolmé na QS .



Pomocný text, další informace o semináři najdete na stránkách brkos.math.muni.cz

Svá řešení posílejte na adresu:

BRKOS

Přírodovědecká fakulta MU

Kotlářská 2

611 37 Brno

nebo uploadujte na našich stránkách:

<http://brkos.math.muni.cz/>